Examen d'automatique, ENSI 1

Seules les notes de cours et le polycopié sont autorisés. La calculatrice est interdite

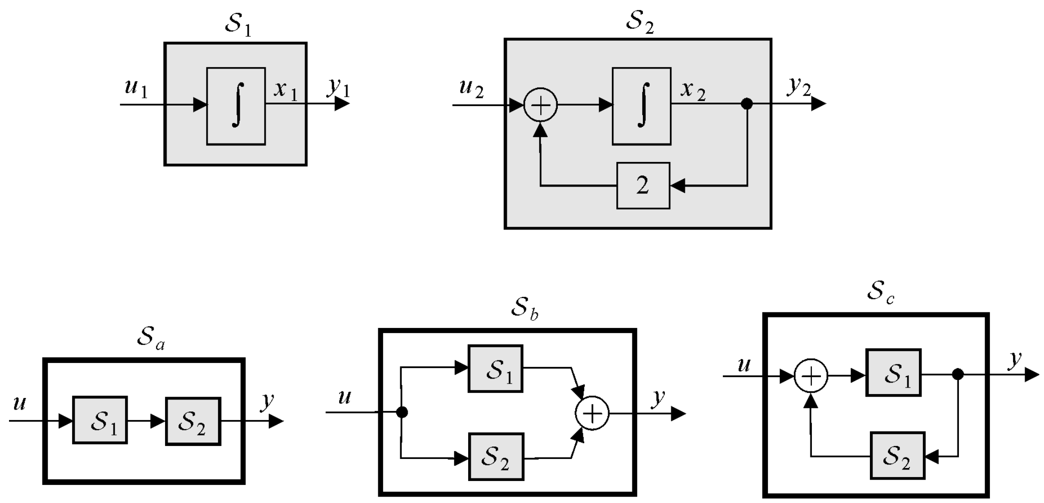
Mercredi 7 décembre 2011 en H4. Responsable : Luc Jaulin

Exercice 1. On considère les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ donnés sur la figure ci-dessous.

1) Donner les équations d'état sous forme matricielle du système $\mathcal{S}_a$ obtenu en mettant les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en série. Donner la fonction de transfert et polynôme caractéristique de $\mathcal{S}_a$.

2) Faire de même avec le système $\mathcal{S}_b$ obtenu en mettant les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en parallèle.

3) Faire de même avec le système $\mathcal{S}_c$ obtenu en bouclant $\mathcal{S}_1$ par $\mathcal{S}_2$ comme représenté sur la figure.

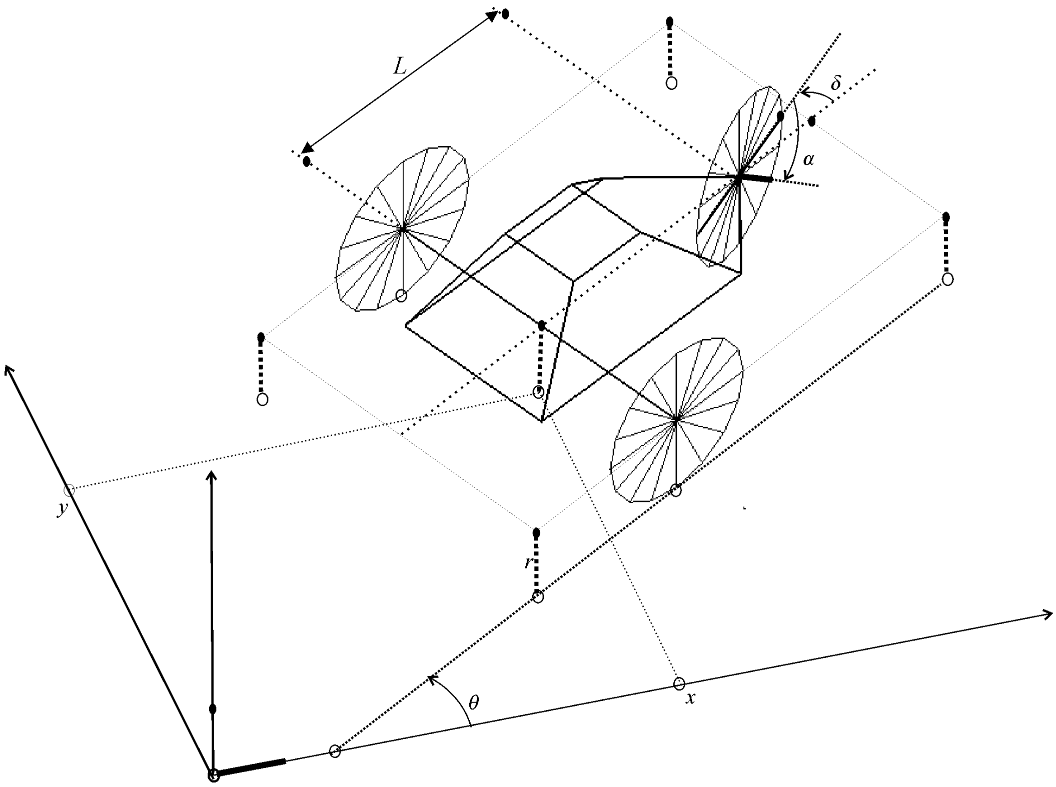


Exercice 2. On considère un pendule décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin \theta}{\ell},$$

où θ représente l'angle du pendule. On prendra $g = 9.81ms^{-2}$ et $\ell = 1m$. On initialise le pendule à l'instant $t = 0$ avec $\theta = 1$rad et $\dot{\theta} = 0$ rad.s^{-1}. Puis, on lâche le pendule. Ecrire un petit programme (en vous influençant d'une systaxe de type MATLAB) qui détermine l'angle du pendule à l'instant $t = 1s$. Le programme devra utiliser une méthode d'Euler.

Exercice 3. On considère la représentation 3D du tricycle de la figure ci-dessous. Sur cette figure les petits disques noirs sont sur un même plan horizontal de hauteur r et les petits disques creux sont sur le même plan horizontal de hauteur nulle.



Le rayon de la roue avant (en gras) possède un angle α avec le plan horizontal, comme représenté sur la figure. Donner en fonction de $x, y, \theta, \delta, \alpha, L, r$ l'expression de la matrice de transformation (en coordonnées homogènes) qui relie le rayon positionné sur l'axe Ox (en gras) avec celui (en gras) de la roue avant. L'expression aura la forme d'un produit de matrices.

Solution de l'exercice 1. 1) Les équations d'état du système $\mathcal{S}_a$ sont

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \end{cases}$$

La fonction de transfert $G_a(s)$ et le polynôme caractéristique $P_a(s)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} G_a(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s} * \frac{1}{s-2} \\ P_a(s) &= s(s-2) \end{aligned}$$

2) Pour $\mathcal{S}_b$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_b &: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \\ G_b(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \\ P_b(s) &= s(s-2). \end{aligned}$$

3) Et enfin pour le système bouclé $\mathcal{S}_c$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c &: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \\ G_c(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{s-2}{s^2-2s-1} \\ P_c(s) &= s^2 - 2s - 1. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2. Les équation d'état sont

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-g \sin x_1}{\ell} \end{pmatrix}.$$

Le programme SCILAB ou MATLAB permettant de simuler le pendule pendant une seconde est donné ci-dessous.

```
//---------------------------------------------
function xpoint=f(x)
xpoint=[x(2); -(g/L)*sin(x(1))];
endfunction;
//---------------------------------------------
L=1;g=9.81;dt=0.01; // début du programme
x=[1;0]; //état initial
for t=0:dt:1, //on intègre jusqu'à t=1s
x=x+f(x)*dt; //méthode d'Euler;
end;
//---------------------------------------------
```

Le programme ci-dessus genère le vecteur $\mathbf{x}$ correspondant à l'état du pendule pour $t = 1s$. L'angle est correspond à x_1.

Solution de l'exercice 3. Cette matrice de transformation est donnée par

$$\mathbf{R} \;:\; = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translation du corps}} * \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation du corps}} * \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{positionnement de la roue avant}}$$

$$* \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -\delta & 0 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation de } \delta \text{ suivant } Oz} * \underbrace{\begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotation de } \alpha \text{ suivant } Oy}$$
