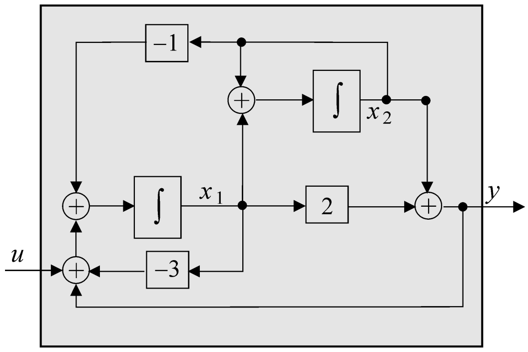
Examen d'automatique, ENSTA-Bretagne, rattrapage, ENSI 1

Jeudi 8 mars 2012

Ni la calculatrice, ni le polycopié, ni aucun autre document n'est autorisé

Responsable Luc Jaulin

Exercice 1 *(10 points)* : On considère le système $\mathcal{S}$ décrit par le câblage ci-dessous.

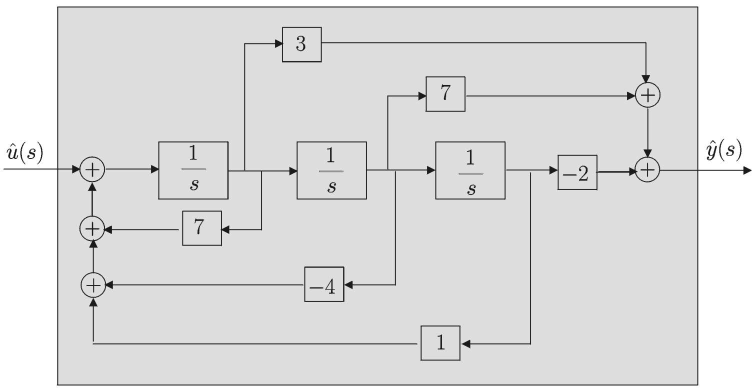


1) Donner ses équations d'état sous forme matricielle

2) Calculer le polynôme caractéristique du système. Le système est-il stable ?

3) Calculer la fonction de transfert du système.

Exercice 2 *(10 points)* : On considère le système décrit par la figure ci-dessous



On appelle x_1 la sortie du dernier intégrateur (à droite), $x_{2,}$ le deuxième et x_3 le premier.

1) Donner les équations d'état de ce système. Quel est son polynôme caractéristique ?

2) On se propose de réguler ce système par un retour d'état de la forme

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + hw$$

où w est la consigne. Calculer $\mathbf{K}$ pour avoir tous les pôles égaux à -1.

3) On voudrait que, à l'équilibre (c'est-à-dire lorsque la consigne et la sortie ne bougent plus), on ait $y = w$. En déduire la valeur à prendre pour le précompensateur h.

Solution de l'examen d'automatique du jeudi 8 mars 2012

Correction de l'exercice 1

On a

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & -x_2+u-3x_1+y\\ \dot{x}_2 & = & x_1+x_2\\ y & = & 2x_1+x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & u-x_1\\ \dot{x}_2 & = & x_1+x_2\\ y & = & 2x_1+x_2\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u\\ y & = & \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}.\end{array}\right.$$

2) On a $P(s)=(s+1)(s-1)$. Le système est instable car le pôle -1 est à partie réelle positive.

3) Dans le domaine de Laplace les équations d'état s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl}s\hat{x}_1 & = & \hat{u}-\hat{x}_1\\ s\hat{x}_2 & = & \hat{x}_1+\hat{x}_2\\ \hat{y} & = & 2\hat{x}_1+\hat{x}_2.\end{array}\right.$$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{lcl}\hat{x}_1 & = & \frac{\hat{u}}{s+1}\\ \hat{x}_2 & = & \frac{\hat{x}_1}{s-1}=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{\hat{u}}{s+1}\\ \hat{y} & = & 2\frac{\hat{u}}{s+1}+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{\hat{u}}{s+1}=\frac{2s-1}{(s+1)(s-1)}.\end{array}\right.$$

La fonction de transfert est donc

$$H(s)=\frac{2s-1}{(s+1)(s-1)}=\frac{2s-1}{s^2-1}.$$

Correction de l'exercice 2

1) Les équations d'état du système sont

$$\left\{\begin{array}{lcl}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u\\ y & = & \begin{pmatrix}-2 & 7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Le polynôme caractéristique est s^3-7s^2+4s-1.

2) Le système bouclé vérifie

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}+hw)=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}+\mathbf{B}hw$$

avec

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice d'évolution du système bouclé est

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -k_1+1 & -k_2-4 & -k_3+7\end{pmatrix}.$$

dont le polynôme caractéristique est

$$P(s) = s^3 + (k_3 - 7)\, s^2 + (k_2 + 4)\, s + (k_1 - 1)\,,$$

que nous voudrions égal à

$$P_0(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

et donc, par identification,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) A l'équilibre

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\, \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} h \bar{w} = 0 \\ \bar{y} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Puisque $\bar{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} h \bar{w}$, on obtient

$$\bar{y} = -\mathbf{C}\,(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} h \bar{w}$$

et donc

$$h = -\left(\mathbf{C}\,(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}\right)^{-1}$$

Pour

$$h = -\left(\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = -\frac{1}{2}.$$

Notons que pour le calcul de la quantité

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il suffit de résoudre,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
