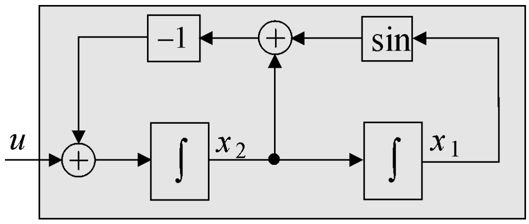
Examen d'automatique, ENSI 1

Mercredi 21 novembre 2012 en H1. Responsable : Luc Jaulin

Consignes. *Seules les notes de cours-TD et le polycopié sont autorisés. La calculatrice est interdite. Eviter les calculs inutiles et encadrer vos résultats.*

Exercice 1 (10 points). Retour d'état

On considère le système représenté par câblage ci-dessous



1) Donner les équations d'état du système.

2) Calculer ses points d'équilibre.

3) Linéariser le système autour d'un point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ correspondant à $x_1 = \pi$. S'agit-il d'un point d'équilibre stable ?

4) Proposer un régulateur par retour d'état de la forme $u = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ qui stabilise le système autour de $\bar{\mathbf{x}}$. On placera les pôles en -1.

Exercice 2 (10 points). Estimateur d'amplitude d'un signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal de pulsation ω peut se mettre sous la forme

$$y(t) = a\cos(\omega t + b)$$

où les paramètres a et b sont inconnus. A partir de la mesure de $y(t)$ on cherche dans cet exercice à retrouver l'amplitude a du signal $y(t)$.

1) En dérivant deux fois le signal y, montrer que y satisfait par une équation différentielle qu'il vous faudra donner.

2) Trouver une équation d'état d'ordre 2 capable de générer le signal $y(t)$. On prendra pour variables d'état $x_1 = \omega y$ et $x_2 = \dot{y}$.

3) Supposons qu'à un instant t, on connaisse le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$. En déduire une expression de l'amplitude a du signal $y(t)$ en fonction de $\mathbf{x}(t)$.

4) On mesure $y(t)$ uniquement. Proposer un observateur d'état (par une méthode de placement de pôle) qui nous génère une estimation $\hat{\mathbf{x}}(t)$ de l'état $\mathbf{x}(t)$. On placera tous les pôles en -1.

5) En déduire les équations d'état d'un estimateur d'entrée y et de sortie $\hat{a}$ qui nous donne une estimation $\hat{a}$ de l'amplitude a d'un signal sinusoïdal de pulsation ω.

Correction de l'examen d'automatique ENSI 1 du mercredi 21 novembre 2012

Solution de l'exercice 1.

1) On a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u - \sin x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Ces équations sont celles d'un pendule amorti d'angle $\theta = x_1$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta} = x_2$.

2) On résout $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \mathbf{0}$ avec $\bar{u} = 0$. On trouve

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

3) On prend $\bar{\mathbf{x}} = (\pi,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Donc

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \simeq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \bar{x}_1 & -1 \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u$$

Le polynôme caractéristique est $P(s) = s^2 + s - 1$. Puisque $P(0) = -1$ et que P a une courbure positive, il a forcément une racine réelle positive. Le système est donc instable.

4) Si on prend $u = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, et si on définit l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$. Puisque $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}u$ et que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x = \dot{\mathbf{x}}$, on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\, \boldsymbol{\varepsilon}_x.$$

Pour calculer $\mathbf{K}$ on résout

$$\det(sI - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (s+1)^2,$$

c'est-à-dire

$$\det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ k_1 - 1 & s + k_2 + 1 \end{pmatrix} = s^2 + s(k_2 + 1) + k_1 - 1.$$

Donc $k_1 = 2,\ k_2 = 1$. Le régulateur est donc

$$u = (-2,\ -1)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = -2x_1 + 2\pi - x_2.$$

Solution de l'exercice 2.

1) En dérivant 2 fois y on obtient

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -a\omega \sin(\omega t + b) \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \cos(\omega t + b). \end{aligned}$$

Donc

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

2) Puisque $x_1 = \omega y$, $x_2 = \dot{y}$, on a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \omega \dot{y} &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} &= -\omega^2 y &= -\omega x_1 \end{cases}$$

et donc les équations d'état sont :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y & = & \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \end{array} \right.$$

3) On a

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & = \omega y & = a\omega \cos(\omega t + b) \\ x_2 & = \dot{y} & = -a\omega \sin(\omega t + b) \end{array} \right.$$

Donc

$$a = \frac{1}{\omega} \|\mathbf{x}\|.$$

4) On prend un observateur de type *Luenberger* donné par

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y.$$

On résout

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1.$$

Or

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) = \det\left(\begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} s + \frac{1}{\omega}\ell_1 & -\omega \\ \omega + \frac{1}{\omega}\ell_2 & s \end{pmatrix}.$$

Donc, l'équation à résoudre devient

$$s^2 + \frac{1}{\omega}\ell_1 s + \omega^2 + \ell_2 = s^2 + 2s + 1.$$

Soit

$$\ell_1 = 2\omega \text{ et } \ell_2 = 1 - \omega^2.$$

L'observateur est donc

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right) \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & \omega \\ -\frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y.$$

5) Ce filtre est décrit par les équations d'état suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix} -2 & \omega \\ -\frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 2\omega \\ 1-\omega^2 \end{pmatrix} y \\ \hat{a} & = & \frac{1}{\omega} \|\hat{\mathbf{x}}\|. \end{array} \right.$$

Ce type de filtre est utilisé pour détecter la présence d'un signal de fréquence connue (son d'un transpondeur sous-marin par exemple). Si a varie légèrement dans le temps, l'estimateur peut aussi être utilisé pour faire de la démodulation d'amplitude.
