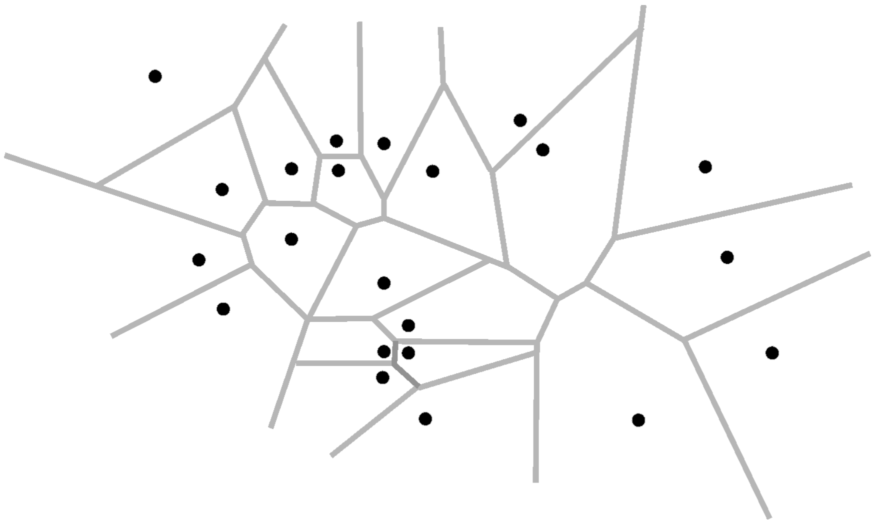
Examen d'automatique, ENSTA-Bretagne, ENSI 2

Vendredi 19 avril 2013

La calculatrice est interdite,

Seuls le polycopié de robotique et vos notes de cours/td sont autorisés.

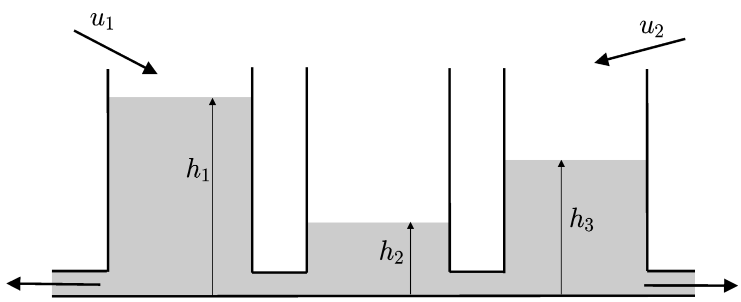
Exercice 1. On considère les 22 points de la figure ci-dessous avec le diagramme de Voronoi associé. Dessiner la triangulation de Delaunay correspondante.



Exercice 2. On considère un système d'écoulement dans trois bacs décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 &= -\alpha(h_1) - \alpha(h_1 - h_2) + u_1 \\ \dot{h}_2 &= \alpha(h_1 - h_2) - \alpha(h_2 - h_3) \\ \dot{h}_3 &= -\alpha(h_3) + \alpha(h_2 - h_3) + u_2. \\ y_1 &= h_1 \\ y_2 &= h_3 \end{cases}$$

où $\alpha(h) = a.sign(h)\sqrt{2g|h|}$. Les h_i correspondent aux hauteurs d'eau et les u_1, u_2 sont les débits d'eau (que l'on peut choisir) dans les bacs 1 et 3.



Nous avons ici choisi pour sorties (ou variable consignées) les hauteurs h_1 et h_3.

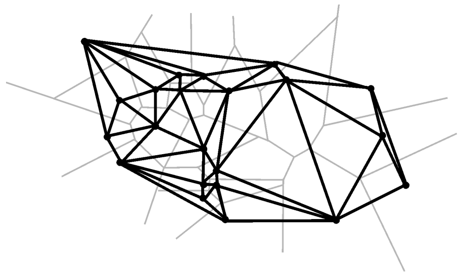
1) Proposez un bouclage qui rende le système linéaire et découplé.

2) Proposer un régulateur proportionnel et intégral pour le système linéarisé. On placera tous les pôles en -1.

3) Donnez les équations d'état du régulateur ainsi obtenu.

Solution de l'examen d'automatique du vendredi 19 avril 2013, ENSI 2

Solution de l'exercice 1. A partir de n points de l'espace, on peut utiliser les diagramme de Voronoï pour effectuer une triangulation de l'espace. La triangulation correspondante, appelée *triangulation de Delaunay* permet de maximiser les petits angles et ainsi d'éviter les triangles allongés. Elle est obtenue en reliant par une arête les points voisins des régions correspondantes dans le diagramme de Voronoï. Dans une triangulation de Delaunay aucun triangle ne contient un autre point à l'intérieur de son cercle circonscrit. La figure ci-dessous représente la triangulation de Delaunay associée au diagramme de Voronoï de l'exercice. Une triangulation de Delaunay est souvent utilisée en robotique pour représenter un espace comme par exemple la zone déjà explorée, la zone interdite, les lacs, ...



Solution de l'exercice 2. 1) Les dérivées des sorties y_1 et y_2 s'expriment par

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x})} \mathbf{u} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha(h_1) - \alpha(h_1 - h_2) \\ -\alpha(h_3) + \alpha(h_2 - h_3) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})}.$$

Le bouclage suivant

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x})) = \mathbf{v} - \begin{pmatrix} -\alpha(h_1) - \alpha(h_1 - h_2) \\ -\alpha(h_3) + \alpha(h_2 - h_3) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{v}$ est notre nouvelle entrée, rend notre système linéaire. Plus précisément ce dernier a la forme $\dot{y}_i = v_i, i \in \{1, 2\}$.

2) On a

$$\mathcal{R}_\mathrm{L} : \begin{cases} v_1(t) &= \alpha_0 (w_1(t) - y_1(t)) + \alpha_{-1} \int_0^t (w_1(\tau) - y_1(\tau))\, d\tau + \dot{w}_1 \\ v_2(t) &= \beta_0 (w_2(t) - y_2(t)) + \beta_{-1} \int_0^t (w_2(\tau) - y_2(\tau))\, d\tau + \dot{w}_2 \end{cases}$$

où w_1 et w_2 sont les nouvelles consignes pour y_1 et y_2. Si on souhaite avoir pour pôles uniquement des -1, il faut

$$\begin{cases} s^2 + \alpha_0 s + \alpha_{-1} &= (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \\ s^2 + \beta_0 s + \beta_{-1} &= (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1, \end{cases}$$

soit $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 1, \alpha_0 = \beta_0 = 2.$

3) Les équations d'état du régulateur par retour d'état pour notre système non linéaire sont données par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= w_1 - h_1 \\ \dot{z}_2 &= w_2 - h_3 \\ u_1 &= z_1 + 2(w_1 - h_1) + \dot{w}_1 + \alpha(h_1) + \alpha(h_1 - h_2) \\ u_2 &= z_2 + 2(w_2 - h_3) + \dot{w}_2 + \alpha(h_3) - \alpha(h_2 - h_3). \end{cases}$$