Examen kalman, ENSTA-Bretagne, ENSI 2

Mardi 12 janvier 2013

La calculatrice est interdite,

Seuls les polycopiés et vos notes de cours/td sont autorisés.

Encadrer tous vos résultats et justifiez vos raisonnements

Responsable Luc Jaulin

On considère trois vecteurs aléatoires $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ centrés et de matrices de covariance égales à l'identité. Ces trois vecteurs sont indépendants entre eux. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ les deux vecteurs aléatoires définis comme suit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} & = & \mathbf{A}\,\mathbf{a} - \mathbf{b} \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}. \end{array}$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ sont des matrices connues.

1) Donner l'expression des espérances mathématiques $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$ et des matrices de covariance $\mathbf{\Gamma_x}, \mathbf{\Gamma_y}$ de ces deux vecteurs, en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$.

2) On forme le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$. Calculer l'espérance mathématique $\bar{\mathbf{v}}$ et la matrice de covarance $\Gamma_{\mathbf{v}}$ pour $\mathbf{v}$. Il faudra donner l'expression en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$.

3) Déduire de la question précédente la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, toujours en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$. On suppose bien sûr que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ont la même dimension.

4) On fait une mesure $\mathbf{y}$, c'est-à-dire, que désormais, le vecteur aléatoire $\mathbf{y}$ devient déterministe et est connu parfaitement. Donner une estimation $\hat{\mathbf{x}}$ pour $\mathbf{x}$ en utilisant un estimateur linéaire, non biaisié et orthogonal. Il faudra donner une expression pour $\hat{\mathbf{x}}$ qui dépend de $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ et $\mathbf{y}$. N'essayez pas de simplifier les expressions. *Notez que cette question est indépendante des questions 2 et 3.*

---

1) Les quantités $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$ sont nulles. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma_x} &= E\left((\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\ (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}\right) = E\left(\mathbf{x}\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\right) \\
&= E\left((\mathbf{A}\ \mathbf{a}-\mathbf{b})\,(\mathbf{A}\ \mathbf{a}-\ \mathbf{b})^{\mathrm{T}}\right) \\
&= E\left(\mathbf{A}\ \mathbf{a}\,\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} +\ \mathbf{A}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}} +\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \mathbf{A}\ \underbrace{E\left(\mathbf{a}\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\right)}_{=\mathbf{I}}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\ \underbrace{E\left(\mathbf{a}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right)}_{=\mathbf{0}}\ +\ \underbrace{E\left(\mathbf{b}\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\right)}_{=0}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} +\ \underbrace{E\left(\mathbf{b}\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right)}_{=\mathbf{I}} \\
&= \mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

De même

$$\mathbf{\Gamma_y} = \mathbf{C}\ \mathbf{\Gamma_x}\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma_c} = \mathbf{C}\ \left(\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}.$$

2) On a bien sûr $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$. On a

$$\mathbf{\Gamma_v} = E\left(\mathbf{v}\ \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} E\left(\mathbf{x}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) & E\left(\mathbf{x}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \\ E\left(\mathbf{y}\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\right) & E\left(\mathbf{y}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix}.$$

Or

$$\mathbf{\Gamma_{xy}} = E\left(\mathbf{x}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) = E\left(\mathbf{x}\ \ (\mathbf{C}\ \mathbf{x} + \mathbf{c})^{\mathrm{T}}\right) = E\left(\mathbf{x}\ \ \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\ + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)\right) = \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C}\ +\ \mathbf{\Gamma_{xc}} = \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C}.$$

car $\mathbf{x}$ et $\mathbf{c}$ sont indépendants (et donc $\mathbf{\Gamma_{xc}} = \mathbf{0}$). Donc

$$\mathbf{\Gamma_v} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_x} & \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{\Gamma_x} & \mathbf{\Gamma_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I} & \left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right) & \mathbf{C}\ \left(\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

3) On a

$$\mathbf{z} = (-\mathbf{I}\ \ \mathbf{I})\,.\mathbf{v}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{z}} &= (-\mathbf{I}\ \ \mathbf{I})\ \mathbf{\Gamma_v}\ \begin{pmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = (-\mathbf{I}\ \ \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_x} & \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{\Gamma_x} & \mathbf{\Gamma_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \\
&= (-\mathbf{I}\ \ \mathbf{I}) \begin{pmatrix} -\mathbf{\Gamma_x} + \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{\Gamma_x} + \mathbf{\Gamma_y} \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma_x} - \mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{\Gamma_x} + \mathbf{\Gamma_y} \\
&= \left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{C}) - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right) + \mathbf{C}\ \left(\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

4) D'après les formules (6.11) page 125 du polycopié sur l'estimateur linéaire, on a

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{y}} \\
&= \bar{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma_y}^{-1}\right)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}) \\
&= \bar{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \left(\mathbf{C}\mathbf{\Gamma_x}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma_c}\right)^{-1}\right)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}) \\
&= \left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\ \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$
