Examen MER (méthodes ensemblistes pour la robotique mobile), ENSTA-Bretagne

Seules vos notes de cours sont autorisées. La calculatrice est interdite

Vendredi 15 février 2013. Responsable : Luc Jaulin

Exercice 1. Intervalles

1) Calculer les deux quantités suivantes

$$\begin{array}{l} ([1,2]*[-1,3]) + \max([1,3]\cap[6,7],[1,2]) \\ \exp([1,2]/[0,\infty]). \end{array}$$

2) Soit la fonction

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2$$

Appliquer une méthode forward/backward pour contracter les intervalles $[x_1] = [0,2]$, $[x_2] = [-1,1]$ et $[y] = [5,10]$ pour x_1, x_2 et y.

Exercice 2. V-stabilité. Le logiciel Stabibex est capable de prouver la (V, v^+)-stabilité d'une inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} \in \left[\mathbf{f}^-(\mathbf{x}), \mathbf{f}^+(\mathbf{x})\right].$$

Pour cela Stabibex démontre en utilisant une technique par contracteur que le système d'inégalités suivant n'a pas de solution

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dV}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}).\mathbf{a} \geq 0 \\ \mathbf{a} \in [\mathbf{f}^-(\mathbf{x}), \mathbf{f}^+(\mathbf{x})] \\ V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \end{array}\right. \quad (*)$$

avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}^+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Ici, on considère prendra l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -x_1 + [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \dot{x}_2 &=& -x_2 + [-\varepsilon, \varepsilon] \end{array}$$

avec $\varepsilon = 0.1$. On cherche à montrer que le système est (V, v^+)-stable avec $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ et $v^+ = 3$.

1) Que devient, dans ce cas particulier, le système (*) ?

2) Dessiner le champ de vecteur pour $\frac{dV}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ et les courbes de niveaux pour $V(\mathbf{x})$.

3) Dessiner sur une deuxième figure les champs de vecteur pour $[\mathbf{f}^-(\mathbf{x}), \mathbf{f}^+(\mathbf{x})]$.

4) Démontrer que le système d'inéquations obtenu est inconsistant. Que peut-on en déduire sur les trajectoires du système ?

Correction de l'examen MER

Solution de l'exercice 1

1) Nous avons

$$
\begin{aligned}
([1,2]*[-1,3]) + \max([1,3]\cap[6,7],[1,2]) &= ([1,2]*[-1,3]) + \max(\emptyset,[1,2]) = \emptyset \\
\exp([1,2]/[0,\infty]) &= \exp([0,\infty]) = [1,\infty].
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 2

1)

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2a_1x_1 + 2a_2x_2 \geq 0 \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon,\varepsilon] \\ [-\varepsilon,\varepsilon] \end{pmatrix} \\
x_1^2 + x_2^2 - 1 \in [0,3]
\end{array}
\right.
$$

2). On obtient

$$
\left\{
\begin{array}{cc}
\text{(i)} & a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0 \\
\text{(ii)} & a_1 \in -x_1 + [-\varepsilon,\varepsilon] \\
\text{(iii)} & a_2 \in -x_2 + [-\varepsilon,\varepsilon] \\
\text{(iv)} & x_1^2 + x_2^2 \in [1,4]\,.
\end{array}
\right.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 &\in (-x_1 + [-\varepsilon,\varepsilon])\,x_1 + (-x_2 + [-\varepsilon,\varepsilon])\,x_2 \text{ (d'après (ii) et (iii))} \\
&= -x_1^2 + [-\varepsilon,\varepsilon]\,x_1 - x_2^2 + [-\varepsilon,\varepsilon]\,x_2 \\
&= -\left(x_1^2 + x_2^2\right) + [-\varepsilon,\varepsilon]\,x_1 + [-\varepsilon,\varepsilon]\,x_2 \\
&\subset -[1,4] + [-\varepsilon,\varepsilon]\cdot[0,2] + [-\varepsilon,\varepsilon]\cdot[0,2] \text{ (d'après (iv))} \\
&= -[1,4] + [-0.2,0.2] + [-0.2,0.2] \\
&= [-4.4,-0.6]
\end{aligned}
$$

ce qui n'est pas compatible avec (i). L'inconsistence nous prouve la (V,v^+)-stabilité.
