Examen d'automatique, ENSI 1

Lundi 2 décembre 2013 en H6. Responsable : Luc Jaulin.

Consignes. *Seules les notes de cours-TD et le polycopié sont autorisés. La calculatrice est interdite. Encadrez vos résultats et justifiez chacun d'eux. Une fois l'examen terminé, vous devez ranger vos affaires, rendre votre copie et enfin sortir par la porte près du tableau.*

On considère un système du second ordre de la forme décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u.$$

1) Donner les équations d'état du système sous forme matricielle. On prendra pour vecteur d'état $\mathbf{x} = (y \ \ \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Dessiner le câblage associé.

2) Soit w une consigne que l'on supposera constante. On souhaite que $y(t)$ converge vers w. On définit l'erreur par

$$e(t) = w - y(t).$$

On se propose de commander notre système par la commande PID (proportionnelle, intégrale et dérivée) suivante

$$u(t) = \alpha_{-1}\int_0^t e(\tau)\,d\tau \quad + \quad \alpha_0 e(t) \quad + \quad \alpha_1 \dot{e}(t),$$

où les α_i sont les coefficients du régulateur. Il s'agit ici d'un régulateur par retour d'état, où on suppose que l'on mesure $\mathbf{x}(t)$. Donner les équations d'état de ce régulateur PID d'entrées $\mathbf{x}$,w et de sortie u. Il vous faudra créer une variable d'état $z(t) = \int_0^t e(\tau)\,d\tau$ pour prendre en compte l'intégrateur de la commande.

3) Dessiner le câblage du système bouclé. Ce schéma sera constitué uniquement d'intégrateurs, d'additionneurs et d'amplificateurs. Soignez votre schéma. Entourez d'un côté le régulateur et de l'autre le système à réguler. Sur le câblage, les paramètres $a_0, a_1, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}$ ne doivent apparaître qu'une seule fois.

4) Donner les équations d'état du système bouclé sous forme matricielle.

5) Comment choisir les coefficients α_i de la commande (en fonction des a_i) pour avoir un système bouclé stable dont tous les pôles sont égaux à -1 ?

6) On change légèrement la valeur des paramètres a_0 et a_1 tout en gardant le même régulateur. On suppose que cette modification ne déstabilise par notre système. Les nouvelles valeurs pour a_0, a_1 sont notées a_0', a_1'. Pour une valeur $\bar{w}$ pour w donnée, vers quelle valeur $\bar{y}$ converge y ? Détaillez votre raisonnement. Que conclure ?

Correction de l'examen d'automatique ENSI 1 du lundi 2 décembre 2013

Correction de l'exercice sur la PID

1) Puisque $\mathbf{x} = (y \;\; \dot{y})^{\mathrm{T}}$, les équations d'état s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 - a_0 x_1 + u \\ y &= x_1 \end{cases}$$

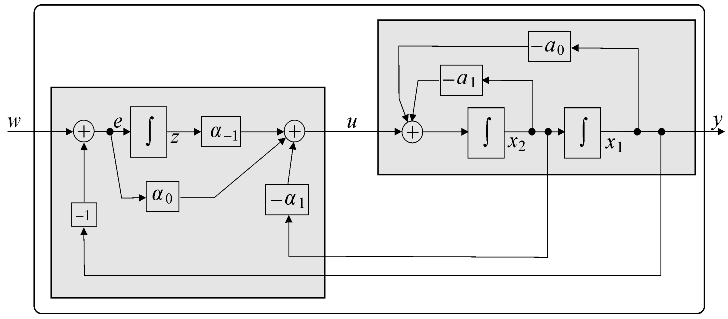
2) On a

$$u = \alpha_{-1} z + \alpha_0 (w - x_1) + \alpha_1 (\dot{w} - \dot{x}_1) = \alpha_{-1} z + \alpha_0 w - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2$$

Puisque $z(t) = \int_0^t e(\tau)\, d\tau$, on a $\dot{z} = -x_1 + w$. Les équations d'état du régulateur sont donc

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -x_1 + w \\ u &= \alpha_{-1} z + \alpha_0 w - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2. \end{aligned}$$

3) Le câblage du système bouclé est donné ci-dessous



4) On a

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + \alpha_{-1} z + \alpha_0 w - \alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2.$$

Les équations d'état du système bouclé sont donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 - \alpha_0 & -\alpha_1 - a_1 & \alpha_{-1} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

5) Le polynome caractéristique est $P(s) = s^3 + (a_1 + \alpha_1) s^2 + (a_0 + \alpha_0) s + \alpha_{-1}$. Pour avoir les pôles en -1, il faut $P(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$.Donc

$$\alpha_1 = 3 - a_1, \;\; \alpha_0 = 3 - a_0, \; \alpha_{-1} = 1.$$

6) A l'équilibre

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0' - \alpha_0 & -\alpha_1 - a_1' & \alpha_{-1} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{w} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{y} &= \bar{x}_1 \end{aligned}$$

Donc $\bar{y} = \bar{x}_1 = \bar{w}$. Peu importe la valeur des paramètres, si le système est stable, du fait du terme intégral, on aura toujours $\bar{y} = \bar{w}$. L'ajout d'un terme intégral permet une commande robuste relativement à tout type de perturbation constante.
