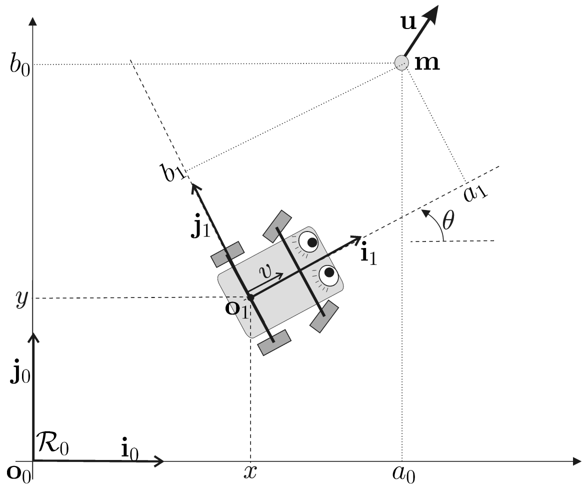
Examen de robotique mobile, ENSTA-Bretagne, ENSI 2

Septembre 2014

La calculatrice est interdite, Aucun document n'est autorisé.

Nous allons ici considérer un problème utilisant les changements de bases et les matrices de rotation. Une voiture est précédée par un autre véhicule $\mathbf{m}$ (que nous supposerons ponctuel). A cette voiture, nous attachons le repère $\mathcal{R}_1 : (\mathbf{o}_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère $\mathcal{R}_0 : (\mathbf{o}_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0)$ est un repère sol supposé fixe.



Cette voiture est munie de capteurs:

- Des odomètres placés sur les roues arrières permettent de mesurer la vitesse v du milieu de l'essieu arrière.
- Un gyromètre donne la vitesse angulaire de la voiture $\dot{\theta}$, ainsi que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.
- Un accéléromètre placé en $\mathbf{o}_1$ permet de mesurer le vecteur accélération (α, β) de $\mathbf{o}_1$ exprimé dans le repère $\mathcal{R}_1$.
- A l'aide deux radars positionnés à l'avant, notre voiture est capable de mesurer (indirectement) les coordonnées (a_1, b_1) du point $\mathbf{m}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$ ainsi que les deux premières dérivées $\left(\dot{a}_1, \dot{b}_1\right)$ et $\left(\ddot{a}_1, \ddot{b}_1\right)$.

En revanche, la voiture n'est pas munie d'un système de localisation (de type GPS, par exemple) qui lui permettrait de connaitre $x, y, \dot{x}, \dot{y}$. Elle n'est pas munie de boussole pour avoir l'angle θ. Le tableau suivant récapitule les quantités mesurées et celles qui ne le sont pas

Mesurées	$v, \dot{\theta}, a_1, b_1, \alpha, \beta.$
Inconnues	$x, y, \dot{x}, \dot{y}, \theta, a_0, b_0$

Si une quantité est mesurée, on supposera que ses dérivées sont aussi mesurées, mais pas leur primitive. Par exemple $\dot{a}_1, \dot{b}_1, \ddot{a}_1, \ddot{b}_1$ sont considérées comme mesurées car a_1, b_1 sont mesurées. En revanche, $\dot{\theta}$ est mesuré, mais pas θ. On ne connait pas les équations d'état de notre voiture. Le but du problème est de trouver une condition sur les variables mesurées (et leurs dérivées) qui nous permettent de dire si le point $\mathbf{m}$ est un train de freiner ou non. On comprend bien qu'une telle condition nous permettrait de fabriquer avertisseur qui nous informe le véhicule qui nous précède freine, et ceci même si ses feux de freinage arrières sont invisibles (brouillard, remorque non équipée de feux) ou défectueux.

1) En exprimant la relation de Chasle ($\mathbf{o}_0\mathbf{m} = \mathbf{o}_0\mathbf{o}_1 + \mathbf{o}_1\mathbf{m}$) dans le repère $\mathcal{R}_0$, montrer que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{R}_\theta$ est une matrice de rotation dont vous donnerez l'expression.

2) Montrer que $\mathbf{R}_\theta^{\mathrm{T}}.\dot{\mathbf{R}}_\theta$ est une matrice antisymétrique et donner son expression.

3) Soit $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse du point $\mathbf{m}$ vu par un observateur fixe. En dérivant la relation montrée à la question 1), donner une expression $\mathbf{u}_{|\mathcal{R}_1}$ du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ exprimé dans le repère $\mathcal{R}_1$. On donnera $\mathbf{u}_{|\mathcal{R}_1}$ en fonction $\dot{x}, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, a_1, \dot{a}_1, b_1, \dot{b}_1$.

4) Rappelons que les quantités $\dot{x}, \dot{y}, \theta$ ne sont pas mesurées. Exprimer $\mathbf{u}_{|\mathcal{R}_1}$ en fonction des variables mesurées $v, \dot{\theta}, a_1, \dot{a}_1, b_1, \dot{b}_1$.

5) Nous allons maintenant utiliser l'accéléromètre de notre véhicule qui nous donne le vecteur accélération (α, β) de $\mathbf{o}_1$, exprimé dans $\mathcal{R}_1$. En dérivant deux fois $\mathbf{m}_{|\mathcal{R}_0}$, donner l'expression de l'accélération $\mathbf{a}_{|\mathcal{R}_0}$ de $\mathbf{m}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$. En déduire son expression $\mathbf{a}_{|\mathcal{R}_1}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$. Donner l'expression de $\mathbf{a}_{|\mathcal{R}_1}$ uniquement en fonction des variables mesurées.

6) Trouver une condition sur les mesures $\left(v, \dot{\theta}, a_1, b_1, \dot{a}_1, \dot{b}_1, \ddot{a}_1, \ddot{b}_1, \alpha, \beta\right)$ qui nous permettent de détecter que le véhicule de devant est en train de freiner.
