Examen localisation, ENSTA-Bretagne, **ENSI 2**. 13 janvier 2015, **H4**

Tout document autorisé. Interdit de communiquer.

Consignes. Aucun compte rendu n'est demandé. Il faut régulièrement faire vérifier votre avancement par votre encadrant et répondre à ses questions. A la fin de la séance, une note sur cinq vous sera attribuée. La partie écrite sera quant à elle notée sur 15 et ceci afin de former une note d'examen sur 20.

Exercice H4. 1) Générer un nuage de $n = 1000$ points représentant un vecteur aléatoire gaussien centré de $\mathbb{R}^2$ et dont la matrice de covariance est l'identité. Déduire du nuage précédent un nuage pour le vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ tel que

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{\Gamma_x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On rangera les nuages dans une matrice à 2 lignes et n colonnes.

2) Tracer les ellipsoïdes de confiance pour les probabilités $\eta \in \{0.9, 0.99, 0.999\}$.

3) Retrouver une estimation de $\bar{\mathbf{x}}$ et $\Gamma_{\mathbf{x}}$ à partir du nuage pour $\mathbf{x}$.

Remarque. Vous pouvez utiliser les scripts rangés dans www.ensta-bretagne.fr/jaulin/rob.zip

---

Examen localisation, ENSTA-Bretagne, **ENSI 2**. 13 janvier 2015, **H5**

Tout document autorisé. Interdit de communiquer.

Consignes. Aucun compte rendu n'est demandé. Il faut régulièrement faire vérifier votre avancement par votre encadrant et répondre à ses questions. A la fin de la séance, une note sur cinq vous sera attribuée. La partie écrite sera quant à elle notée sur 15 et ceci afin de former une note d'examen sur 20.

Exercice H5. On cherche à estimer un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ qui vérifie les équations d'état suivantes

$$y(k) = \mathbf{C}(k)\,\mathbf{x} + \beta(k),$$

avec

k	0	1	2	3	4
$\mathbf{C}(k)$	(4 , 0)	(10 , 1)	(10 , 5)	(13 , 5)	(15 , 3)
$y(k)$	5	10	11	14	17

On suppose que la variance pour l'erreur de mesure β vaut 9 et que $x_1 \simeq 1$ et $x_2 \simeq -1$ avec une variance de 4. En utilisant le filtre de Kalman, calculer une estimation pour $\mathbf{x}$ et donner la matrice de covariance associée à cette estimation.

Remarque. Vous pouvez utiliser les scripts rangés dans www.ensta-bretagne.fr/jaulin/rob.zip

---

Pour les encadrants

Indications. En plus de surveiller les étudiants, il faut vérifier leur avancement et leur poser des questions. Aucun compre rendu n'est demandé, mais il me faut une note sur cinq à la fin de la séance. (*Mauvais : 1/5; Moyen 3/5; Très bon : 5/5*). Je m'occupe d'imprimer les sujets et de vous les donner juste avant l'épreuve.

Liste étudiants H4

Groupe A (12), Salle F021 en H4 (*Pierre Bosser*). pauline.charruyer, thibault.chevet, claire.clenet, melanie.diaz, lucas.dissaux, alexis.duquesnoy, robin.gahery, wanjing.guandai, simon.gueguen, ismail.hmaman, sabrina.homrani, celine.jacq.

Groupe B (12), Salle F023 en H4 (*Fabrice Le Bars*). Liro Kuusisto, remi.labonde , Julien Lemercier, alexis.lepot, morgane.meillour, christelle.mekemlong, gael.roue, clement.sannier, qian.sun, Indragiri Wardhono, xiaodan.zhang, yong.zhou.

Groupe C (15) Salle F022 en H4 (*Luc Jaulin*). Zyad Al Amri, Khalid Al Homaide, Muhannad Al Huwaimil, Hussain Al Othman,Al Shaikh Fahad ,quentin.aubertot, elouan.autret, astrid.beranger-fenouillet, katleen.blanchet, aksel.boiron, pierrick.bolbaert, thomas.boulier , titouan.boulmier, maxime.bouyssou, adeline.cauvet

Liste étudiants H5

Groupe D (16) Salle F021 en H5 (*Fabrice Comblet*). philippe.chuzel , etiene.da_cruz, alice.danckaers, brian.detourbet, laure.dupasquier, david.duverger, brieuc.fabre, pierre.ficamos, camille.finand, victor.freitas , xinrui.guo, reda.haddouchi, dinghao.hu, sylvain.hunault, pierre.jacquot, jeremy.paule,

Groupe E (15) Salle F023 en H5 (*Fabrice Le Bars*), aurelien.jolivard, youssef.korchi, gurvan.le_bleis , ang.li , yutao.li, wanxin.liu, pierre-alexandre.machard, nima.mehdi, jean-philibert.mereaux, arthur.mittmann, eric.mourre, vannhan.nguyen,

Groupe F (17), Salle F022 en H5 (*Luc Jaulin*). benoit.raymond, sisi.ren, alexis.revol, sophia.rezende, corentin.rifflart, clement.rodde, marion.rohe, marie-alice.schweitzer, armand.sellier, hugo.six, remy.terrein, khadimoullah.vencatasamy, pavelle.wandji, yiqian.zhao, tao.zheng. thibault.philippe, julien.pineau

---

Correction exercice H4

C'est une partie de l'exercice 38. Voir *http://youtu.be/yHG1GlvuZ7E*

1) `n=1000; Gx=[3,1;1,3]; xbar=[2;3]; b=randn(2,n);`
`x=xbar*ones(1,n)+sqrtm(Gx)*b; plot(x(1,:),x(2,:),'.');`

2) Il faut faire les appels suivants : `draw_ellipse(xbar,Gx,0.9); draw_ellipse(xbar,Gx,0.99);`
`draw_ellipse(xbar,Gx,0.999);`

3) `xhat=[mean(x(1,:));mean(x(2,:))]; xtilde=x-xbar*ones(1,n);`
`g11=mean(xtilde(1,:).*xtilde(1,:)); g12=mean(xtilde(1,:).*xtilde(2,:));`
`g22=mean(xtilde(2,:).*xtilde(2,:)); Ghat=[g11,g12;g12,g22];`

Correction exercice H5

C'est l'exercice 46 déguisé. Voir *http://youtu.be/_05sBBiw3ac*

Afin d'utiliser le filtre de Kalman, nous allons prendre les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} & = & \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ y_k & = & \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\beta}_k. \end{cases}$$

Le programme Matlab associé est donné ci-dessous

```
y=[5;10;11;14;17]; C=[4 0;10 1;10 5; 13 5;15 3]
xhat=[1;-1];Gx=4*eye(2,2);
Galpha=zeros(2,2); Gbeta=9;A=eye(2,2); u=zeros(2,1);
for k=1:5,
[xhat,Gx]=kalman(xhat,Gx,u,y(k),Galpha,Gbeta,A,C(k,:));
end;
```

L'estimation obtenue est alors :

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1.13 \\ -0.14 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{\Gamma_x} = \begin{pmatrix} 0.06 & -0.17 \\ -0.17 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Examen localisation, ENSTA-Bretagne, **ENSI 2**. 13 janvier 2015

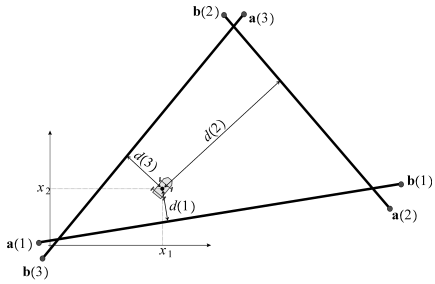
La calculatrice est interdite. Seul le polycopié et vos notes de cours/td/be sont autorisés.

Exercice 1. On considère un signal scalaire $x(k)$ généré de la façon suivante $x(k+1) = a \cdot x(k) + \alpha(k)$ où α est un un bruit blanc gaussien centré de variance Γ_α. La condition initiale $x(0)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance Γ_0.

1) En vous aidant de l'expression du filtre de Kalman, donner une expression pour l'espérance mathématique $\hat{x}_k$ et la variance Γ_k de $x(k)$ à l'instant k.

2) Donner Γ_0 en fonction de a et Γ_α afin d'avoir un signal aléatoire stationnaire. On rappelle qu'un signal aléatoire $x(k)$ est stationnaire alors Γ_k est indépendant du temps. Interpréter votre résultat.

Exercice 2. On considère un robot supposé pontuel positionné en $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Il mesure sa distance à 3 murs, comme sur la figure. Le $i^{\text{ième}}$ mur correspond à une droite repérée par deux points $\mathbf{a}(i)$ et $\mathbf{b}(i)$.



La distance au $i^{\text{ième}}$ mur est donnée par

$$d(i) = \det(\mathbf{u}(i), \mathbf{x} - \mathbf{a}(i)) + \beta_i,$$

avec $\mathbf{u}(i) = \frac{\mathbf{b}(i)-\mathbf{a}(i)}{\|\mathbf{b}(i)-\mathbf{a}(i)\|}$. Chaque distance est mesurée avec une erreur β_i centrée de variance 1 et toutes les erreurs sont indépendantes entre elles. A priori (c'est-à-dire avant de prendre ses mesures), le robot pense qu'il est à la position $\bar{\mathbf{x}} = (1, 2)$ avec une matrice de covariance associée donnée par $100 \cdot \mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est la matrice identité.

1) Donner, en fonction des $\mathbf{a}(i), \mathbf{b}(i), d(i)$, une estimation de la position du robot ainsi que la matrice de covariance pour l'erreur. On pourra utiliser pour cela l'expression de l'estimateur linéaire orthogonal non biaisé ou bien de façon équivalente l'expression du filtre de Kalman en mode correction.

2) Les coordonnées des points ainsi que les distances sont données ci-dessous

i	1	2	3
$\mathbf{a}(i)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$
$\mathbf{b}(i)$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$d(i)$	2	5	4

Donner un programme MATLAB qui nous donne l'estimation demandée. Ce programme pourra utilisé la fonction suivante donnée dans le cours.

```
function [x1,G1]=kalman(x0,G0,u,y,Galpha,Gbeta,A,C).
```

Correction de l'exercice 1. 1) Puisque l'on a aucune mesure, on peut écrire

$$\begin{array}{llll} \hat{x}_{k+1|k} & = a\hat{x}_{k|k} & \hat{x}_{k|k} & = \hat{x}_{k|k-1} \\ \Gamma_{k+1|k} & = a^2 \cdot \Gamma_{k|k} + \Gamma_\alpha & \Gamma_{k|k} & = \Gamma_{k|k-1} \end{array}$$

ou plus simplement, en posant $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_k$ et $\Gamma_k = \Gamma_{k|k}$

$$\begin{array}{lll} \hat{x}_{k+1} & = & a\hat{x}_k \\ \Gamma_{k+1} & = & a^2 \cdot \Gamma_k + \Gamma_\alpha. \end{array}$$

On obtient donc $\hat{x}_k = 0$ et $\Gamma_1 = a^2 \cdot \Gamma_0 + \Gamma_\alpha$, $\Gamma_2 = a^2 \cdot a^2 \cdot \Gamma_0 + a^2 \cdot \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha, \dots$ Soit

$$\Gamma_k = a^{2k} \cdot \Gamma_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{2i} \cdot \Gamma_\alpha = a^{2k} \cdot \Gamma_0 + \frac{1-a^{2k}}{1-a^2} \cdot \Gamma_\alpha.$$

2) On a $\Gamma_k = a^2 \cdot \Gamma_k + \Gamma_\alpha$ pour tout k et donc $\Gamma_0 = \frac{\Gamma_\alpha}{1-a^2}$. Si $a > 1$, le système est instable et le signal ne peut donc pas être stationnaire.

Correction de l'exercice 2. 1) On a

$$d(i) = -u_2(i) \cdot x_1 + u_1(i) \cdot x_2 + \ u_2(i) \cdot a_1(i) - u_1(i) \cdot a_2(i) + \beta_i.$$

En posant $y_i = d(i) - \bar{d}(i)$ et $\bar{d}(i) = u_2(i) \cdot a_1(i) - u_1(i) \cdot a_2(i)$, on obtient $y_i = \begin{pmatrix} -u_2(i) & u_1(i) \end{pmatrix} \mathbf{x} + \beta_i$. Ainsi, on forme les quantités

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} d(1) - \bar{d}(i) \\ d(2) - \bar{d}(i) \\ d(3) - \bar{d}(i) \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -u_2(1) & u_1(1) \\ -u_2(2) & u_1(2) \\ -u_2(3) & u_1(3) \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Gamma}_\beta = \mathbf{I}_3, \ \mathbf{\Gamma}_\mathbf{x} = 100 \cdot \mathbf{I}_2, \ \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on applique les équations de l'estimateur linéaire orthogonal :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{y}} & \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} & \mathbf{\Gamma}_\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_\mathbf{x}\mathbf{C}^\mathrm{T} + \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I} - \mathbf{KC})\,\mathbf{\Gamma}_\mathbf{x} & \mathbf{K} = \mathbf{\Gamma}_\mathbf{x}\mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{\Gamma}_\mathbf{y}^{-1} & \end{array}$$

2) Le programme demandé est donné ci-dessous.

```
A=[2 15 3; 1 5 12]; B=[15 3 2; 5 12 1];C=[];dbar=[];
for i=1:3,
u=(B(:,i)-A(:,i))/norm(B(:,i)-A(:,i));
C=[C;[-u(2),u(1)]]; dbar=[dbar;det([u,-A(:,i)])];
end
d=[2;5;4]; y=d-dbar;
x0=[1;2];G0=100*eye(2,2);u=0;Galpha=0*G0;Gbeta=eye(3,3);
[x1,G1]=kalman(x0,G0,u,y,Galpha,Gbeta,eye(2,2),C);
```

L'estimation ainsi calculée est représentée sur la figure ci-dessous par son ellipsoïde de confiance.