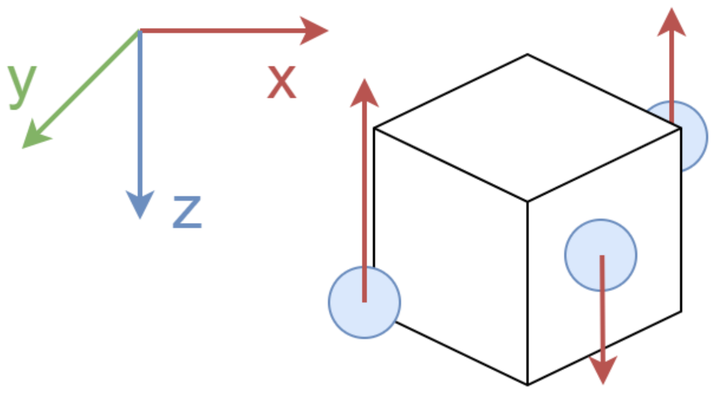
Commande en orientation et profondeur par 3 ballasts

Mathis Riera, stage de M2

Présentation du problème
Objectifs et difficultés

Objectifs de la commande

- Stabilisation à une profondeur et orientation donnée
- Objectif d'orientation complète (les 3 angles d'Euler)



Forces selon z → couples dans le plan (x,y)

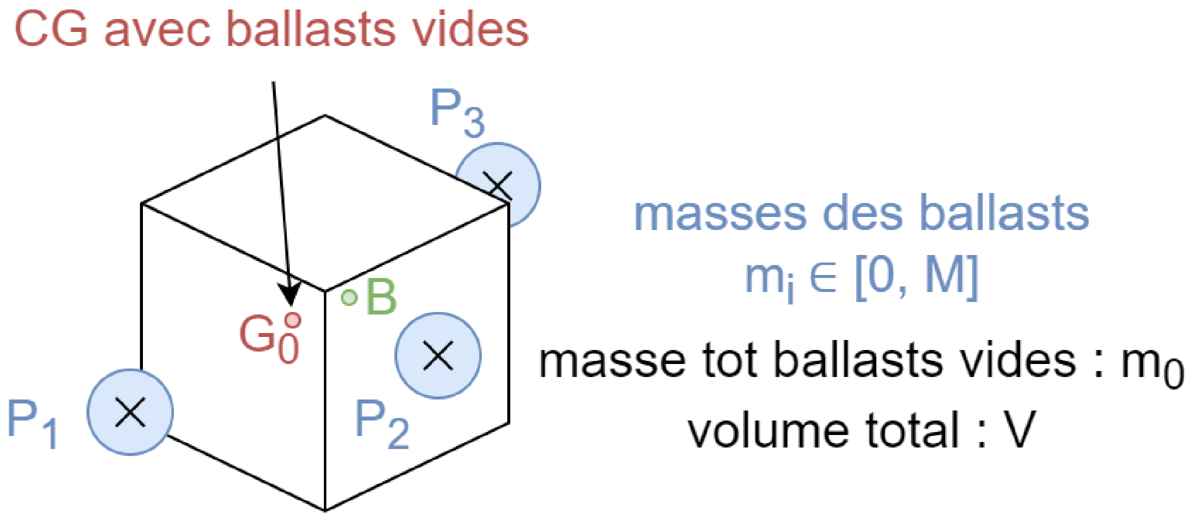
Contraintes de l'actionnement par ballasts

- Ils ont tous la même direction d'action
  - Pas de couple selon l'axe **z**
  - Notamment, contrôle direct du cap impossible
- Limitation à 3 ballasts

Présentation du problème
Modélisation du problème

Paramétrage du robot

- Un corps :
  - masse m_0, volume V
  - Centres de gravité G_0
  - Centre de poussé B
- 3 ballasts aux points P_i de masse comprise dans [0, M]

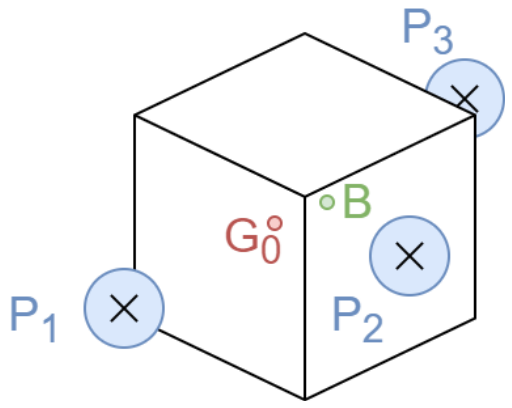


Conditions sur les m_i pour la stabilité (étude statique)

- Stabilité en profondeur : $m_0 + \sum m_i = \rho V$
- Stabilité en orientation : il faut pouvoir placer aligner G et B selon **z**

Quelles sont les orientations stables avec 3 ballasts ?

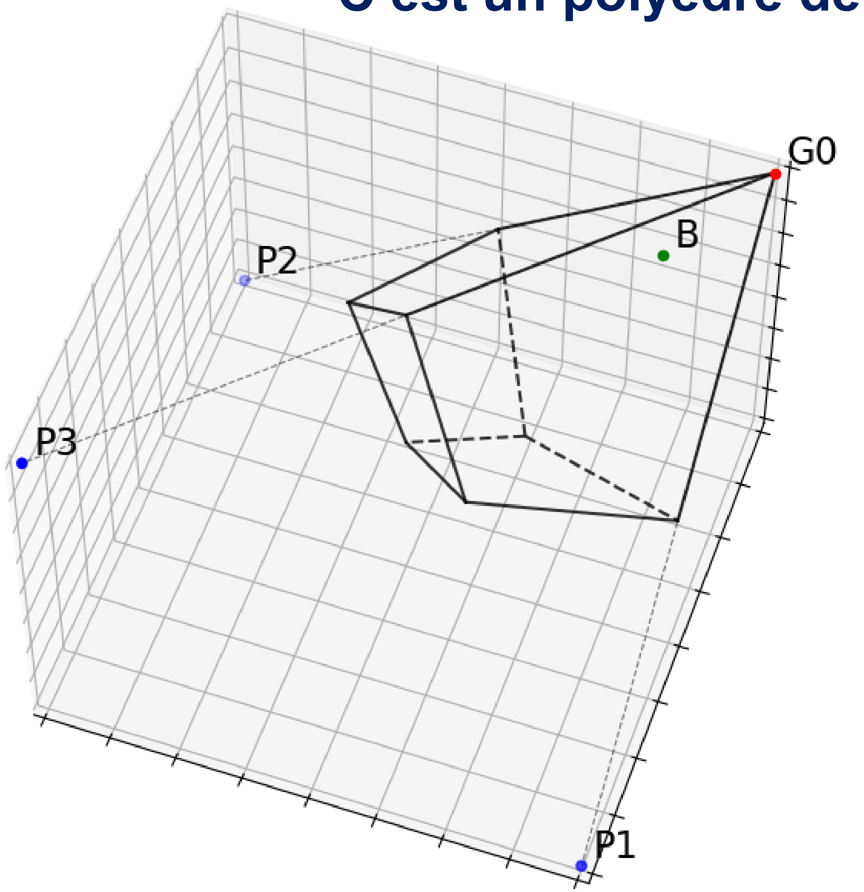
Étude statique du robot
Orientations stables avec 3 ballasts



Les conditions de stabilité d’un point de vue géométrique

- Stabilité en orientation : G et B alignés selon **z**
- On cherche donc les positions possibles pour le centre de gravité :

C’est un polyèdre dépendant des positions des ballasts



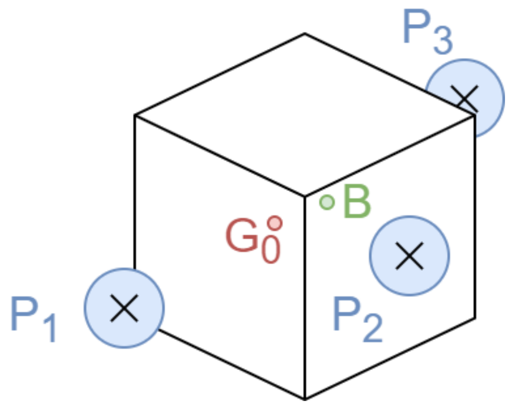
B dans le polyèdre ⇒ toutes les orientations sont stables (statique)

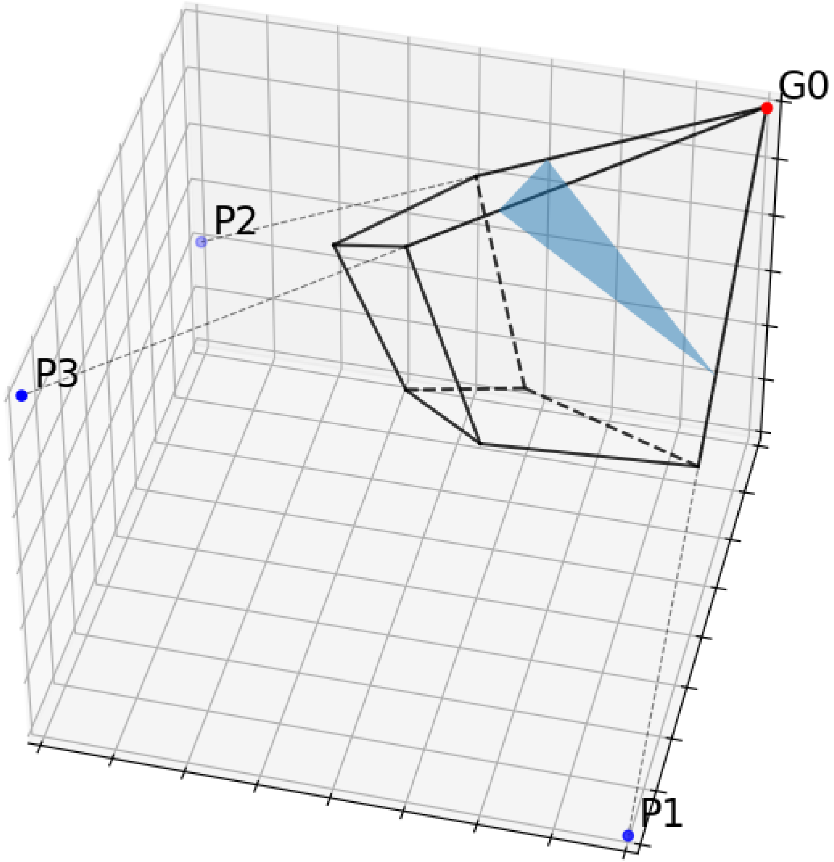
Bijection entre le polyèdre et les m_i

Étude statique du robot
Orientations stables avec 3 ballasts

Les conditions de stabilité d'un point de vue géométrique

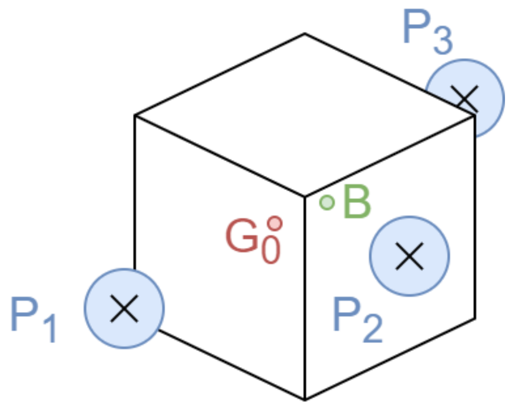
- Stabilité en profondeur : $m_0 + \sum m_i = \rho V$
- Géométriquement : correspond à l'appartenance de G à un plan





Le plan coupe le polyèdre ⇒ on peut stabiliser la profondeur (statique)

Correspond à un bon dimensionnement des ballasts

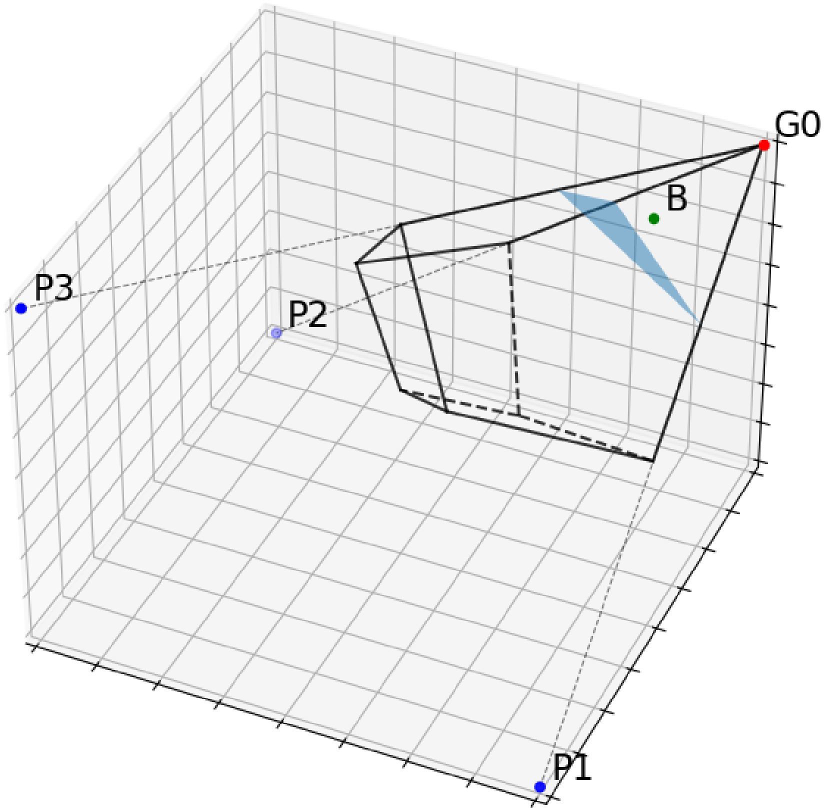


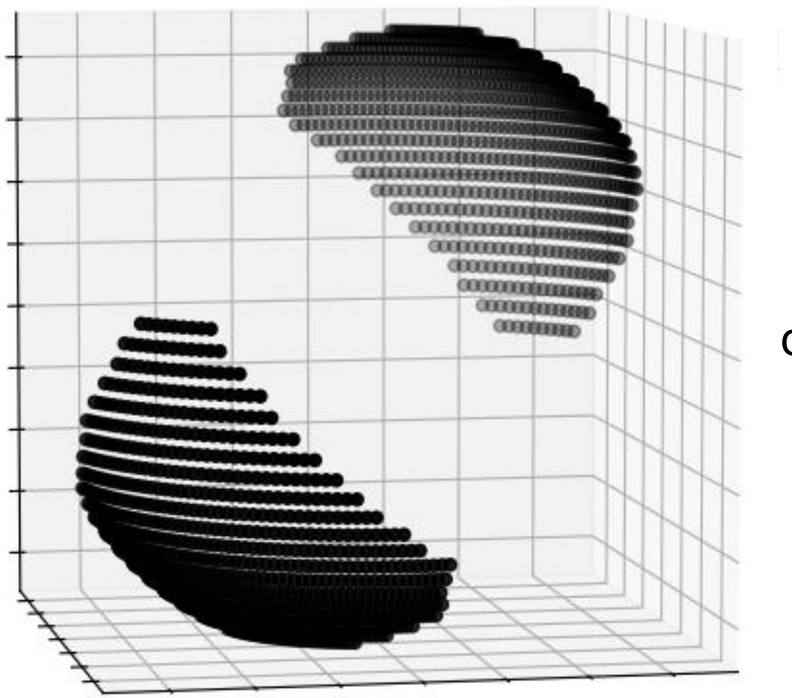
Étude statique du robot
Orientations stables avec 3 ballasts

Conclusion de l'étude statique :

- 3 ballasts → évolution du centre de gravité dans un polyèdre
- Si le polyèdre contient B, alors toutes les orientations sont stabilisables
- Pour stabiliser la profondeur, il faut placer G dans un plan donné

Pour stabiliser la profondeur et l'orientation :





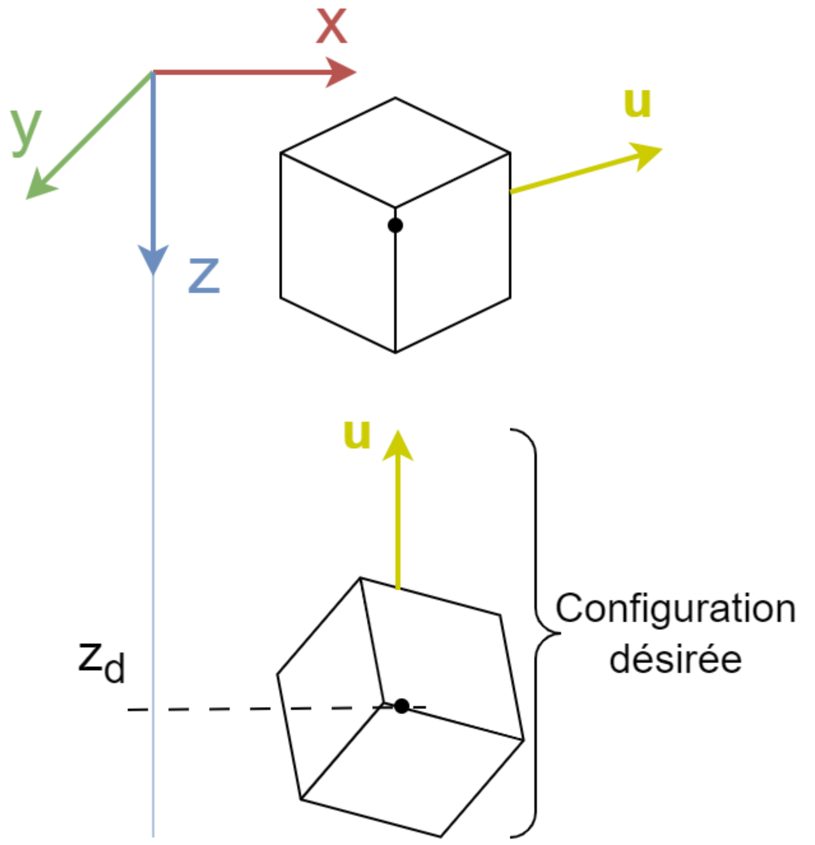
2 intervalles d'orientations possibles

Commande du robot
Commande sans cap

Consigne de position et orientation sans cap

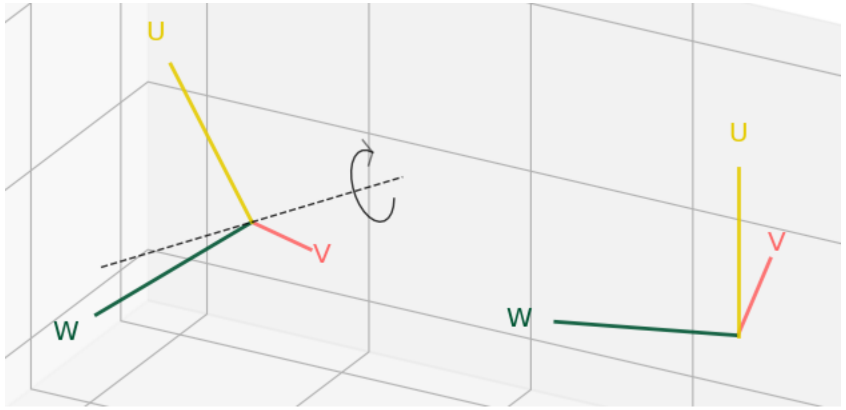
- Commande du robot sans prise en compte du cap :
  - Consigne de profondeur z_d
  - Consigne de direction à amener « vers le haut » : **u**

  → on souhaite aligner **u** à **z**



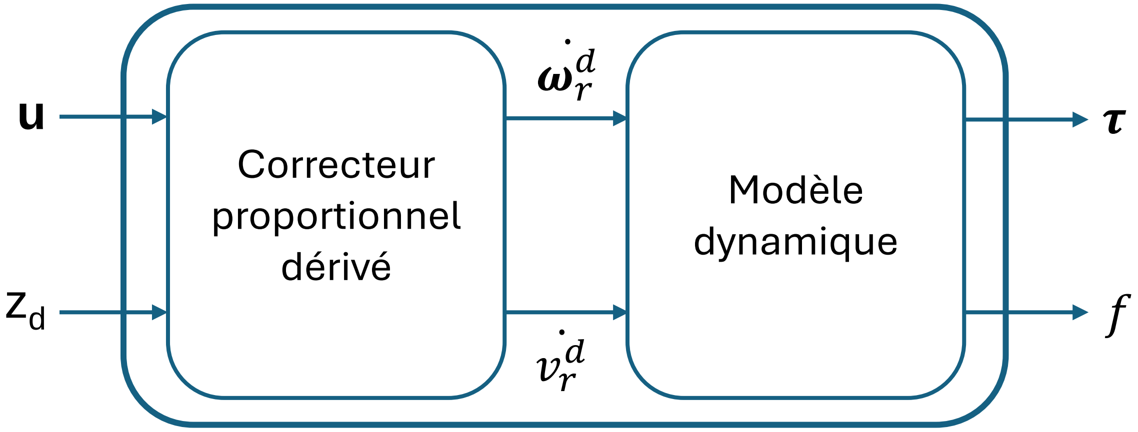
Définition de l’erreur en orientation

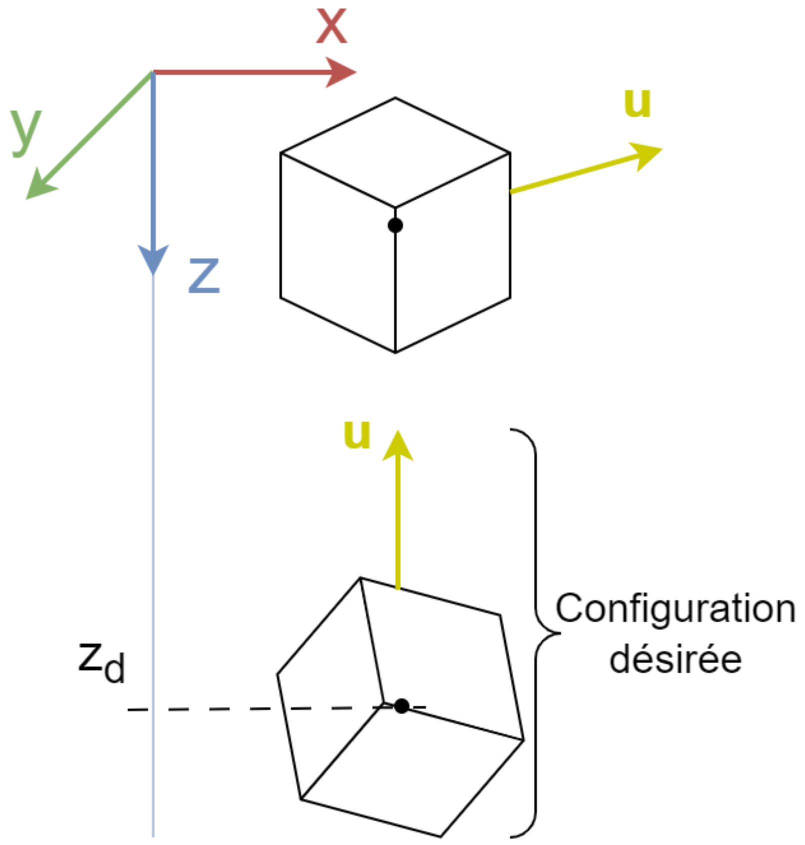
- Erreur définie comme la rotation d’angle plus faible de **u** à –**z**
- Correspond à une rotation d’axe du plan (**x**, **y**)



Commande du robot
Commande sans cap

Commande en linéarisation par bouclage





- Pas de problème pour appliquer f
- Ballasts → on ne peut appliquer des couples que dans le plan (**x**, **y**)
  - Dynamique en rotation : $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_r^d + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_r$

    Dans le plan (**x**, **y**)

  - Si $\mathbf{I}$ non diagonale, il y aura une composante de couple selon **z**

Commande du robot
Commande sans cap

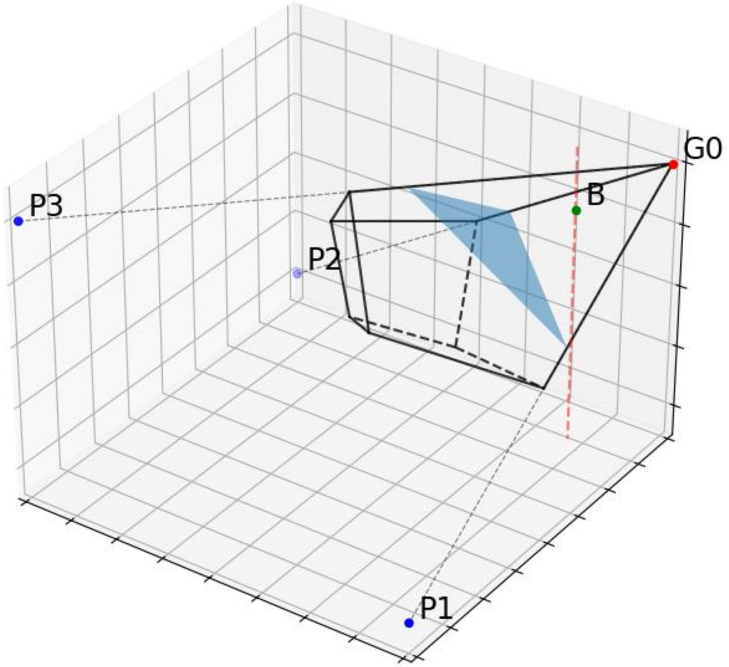
Passage de (τ_x, τ_y, f) à (m_1, m_2, m_3)

- On cherche d'abord des masses sans se soucier des bornes :

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = g.\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\mathbf{P_1} \times \mathbf{z})_{xy} & (\mathbf{P_2} \times \mathbf{z})_{xy} & (\mathbf{P_3} \times \mathbf{z})_{xy} \end{bmatrix}}_{\text{Pas toujours inversible}} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

- D'un point de vue mécanique :
  - Imposer f → placer G sur un plan // plan (P_1, P_2, P_3)
  - Imposer (τ_x, τ_y) → placer G sur une droite dirigée par **z**

→ La solution sort des bornes de masses

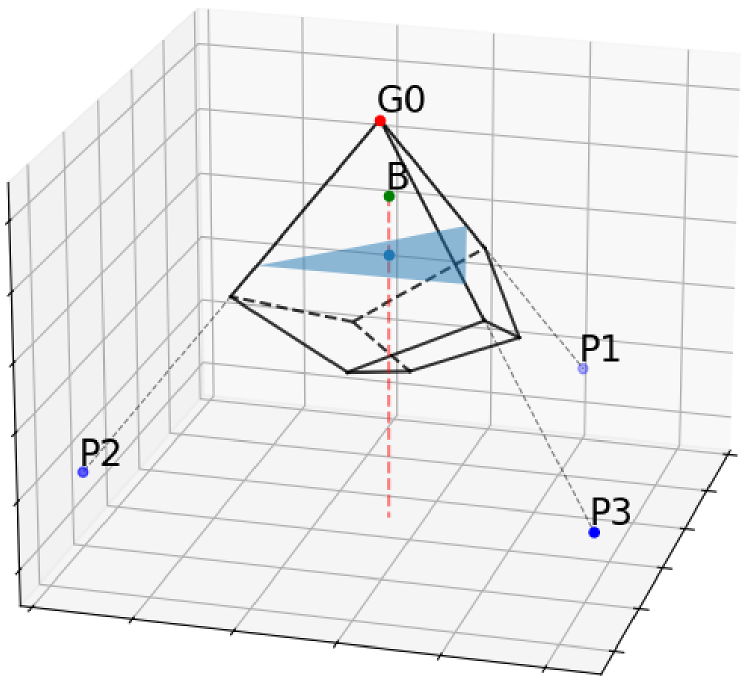


Idée : exploiter une propriété des positions à atteindre

Commande du robot
Commande sans cap

Propriété des positions à atteindre :

- À la bonne orientation, la droite (B,**z**) intercepte un plan parallèle à (P_1, P_2, P_3)
- Les couples à appliquer pour se stabiliser seront faibles



Solution : déjà approcher la bonne orientation

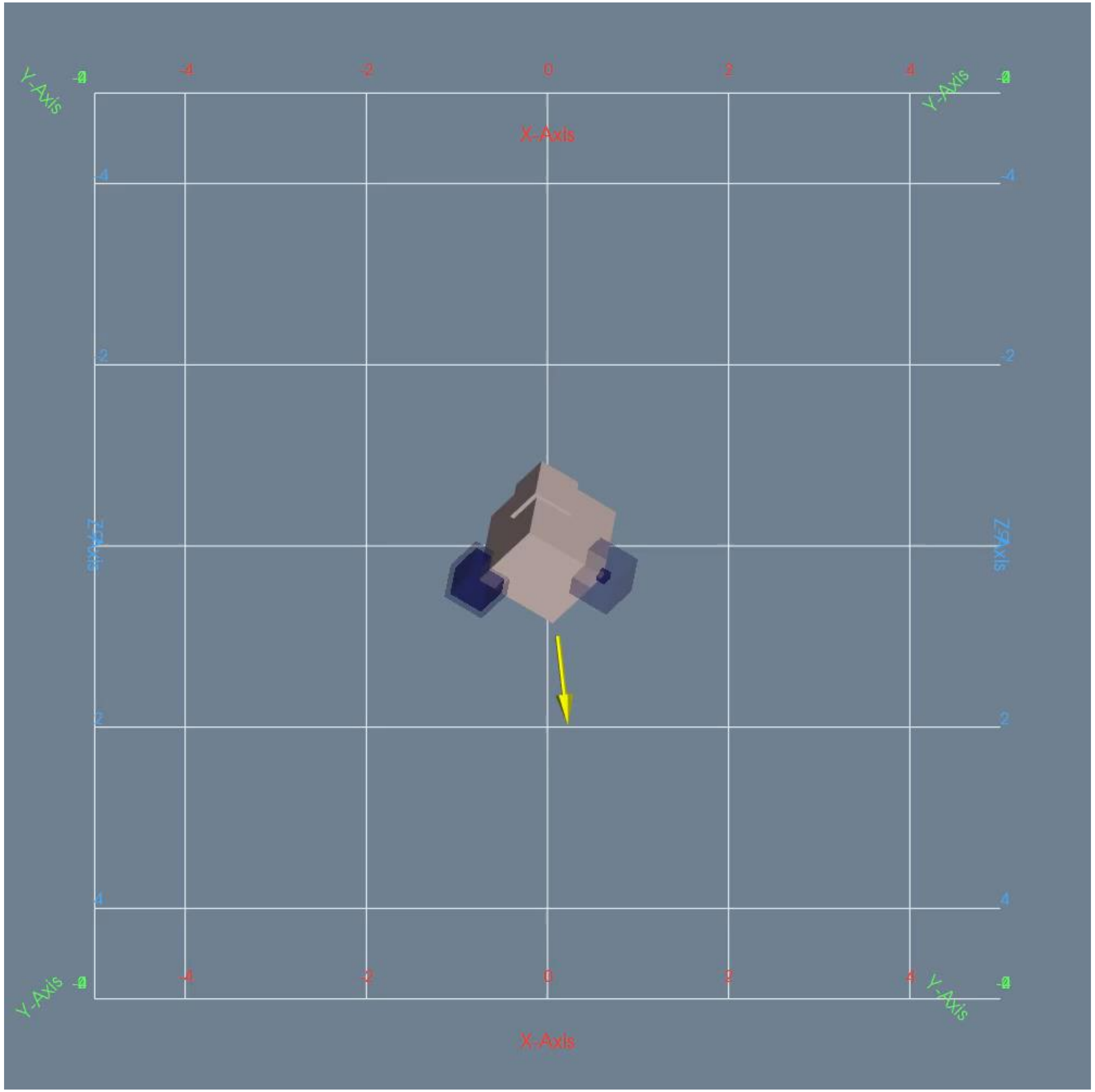
$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = g.\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{P_1} \times \mathbf{z})_{xy} & (\mathbf{P_2} \times \mathbf{z})_{xy} & (\mathbf{P_3} \times \mathbf{z})_{xy} \end{bmatrix}}_{\text{On prend la pseudo-inverse}} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

- Degré de liberté restant → recherche de solution proche des bornes
- Si possible : on peut approcher l'effort f souhaité

Commande du robot
Commande sans cap

Exemple en simulation :

- Conditions initiales :
  - Retourné
  - En z = 0
- Objectif :
  - Orienter **u** « vers le haut »
  - Se placer en z = 0

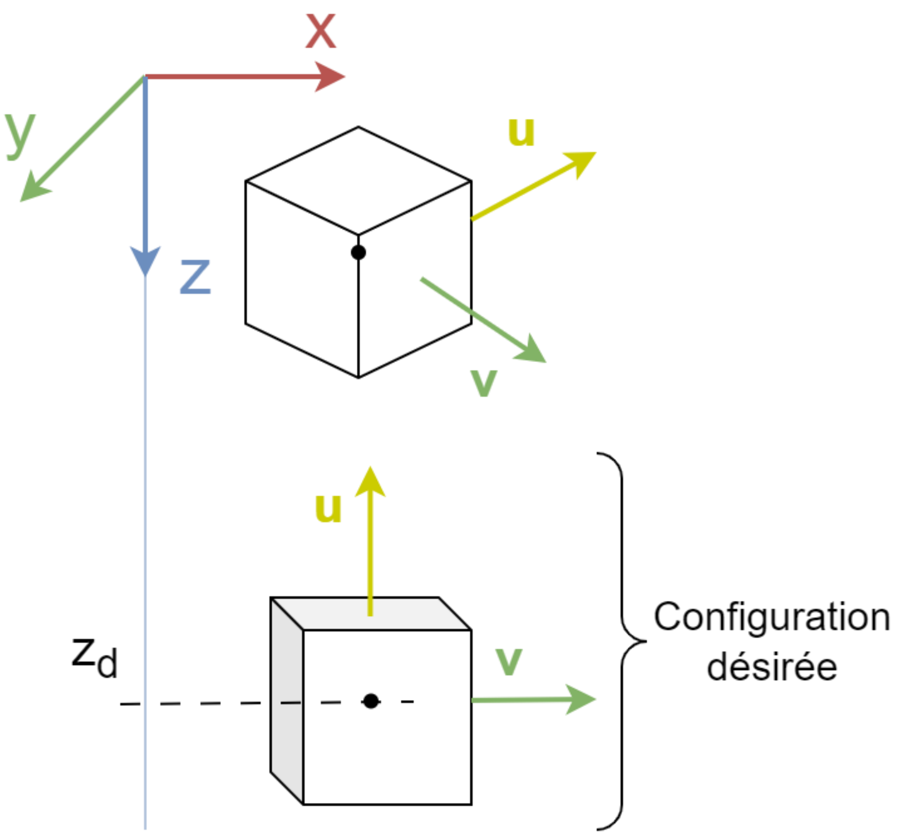


Commande du robot

Commande en cap

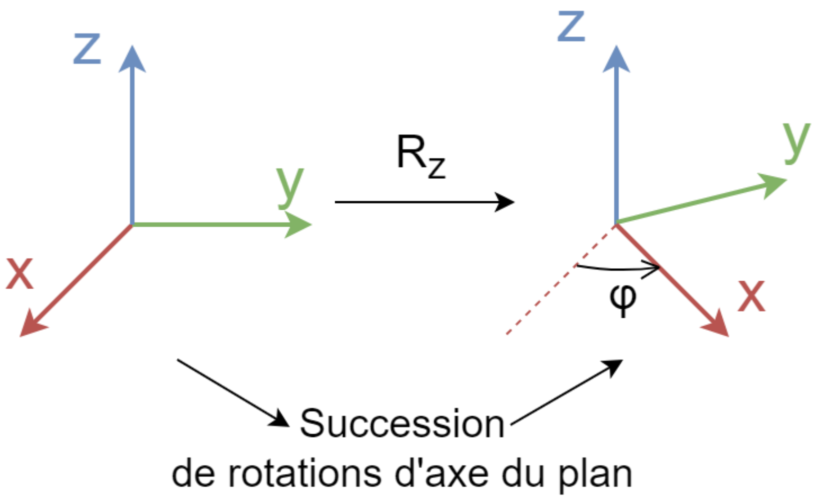
Ajout de la commande en cap

- Consigne de profondeur z_d et « haut » **u**
- Ajout d'une direction **v**, orthogonale à **u**, à aligner à **x**



On a déjà l'orientation de u et la profondeur

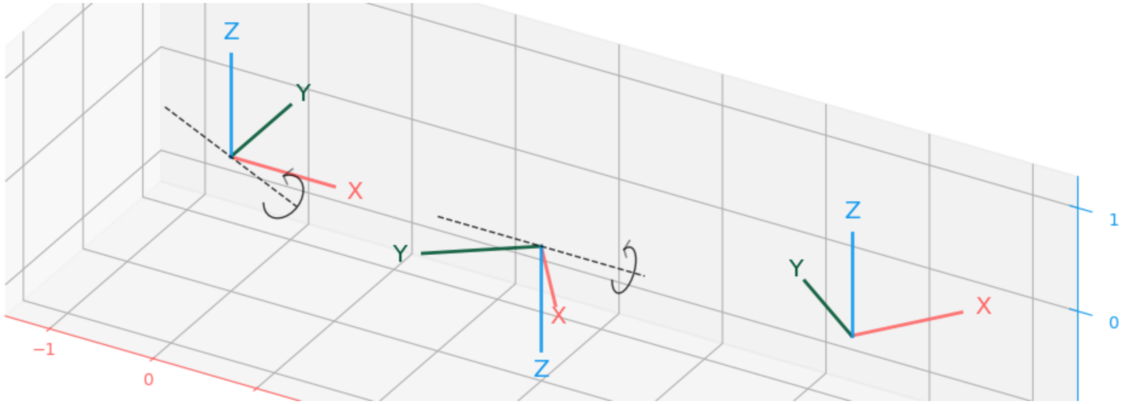
- Il reste une rotation selon z à effectuer :
  - Via une succession de rotations d'axes dans le plan (x,y)
  - Adaptée à la régulation



Commande du robot
Rotation selon l'axe vertical

Approche par succession de 2 rotations

- On montre que toute rotation se décompose en 2 rotations d'axe coplanaire :
- **Problème** : les rotations sont d'angle 180°
  → pas bien adapté à la commande



Approche par succession de 4 rotations

- **Idée** : on a une petite rotation selon **z** avec la séquence de petites rotations selon :

$$\alpha\mathbf{x} \rightarrow \alpha\mathbf{y} \rightarrow -\alpha\mathbf{x} \rightarrow -\alpha\mathbf{y} \qquad \text{avec } \alpha \text{ petit}$$

- Extension au cas de plus grandes rotations en cherchant une séquence du type :

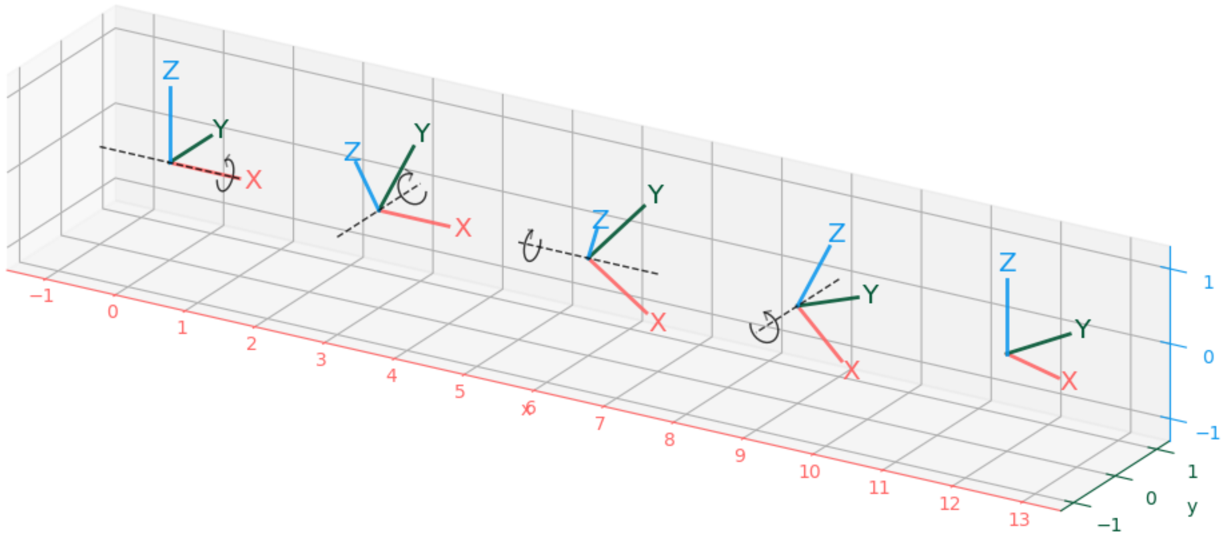
$$\theta_1\mathbf{x} \rightarrow \theta_2\mathbf{y} \rightarrow \theta_3\mathbf{x} \rightarrow \theta_4\mathbf{y} \quad \text{donnant une rotation } \varphi\mathbf{z}$$

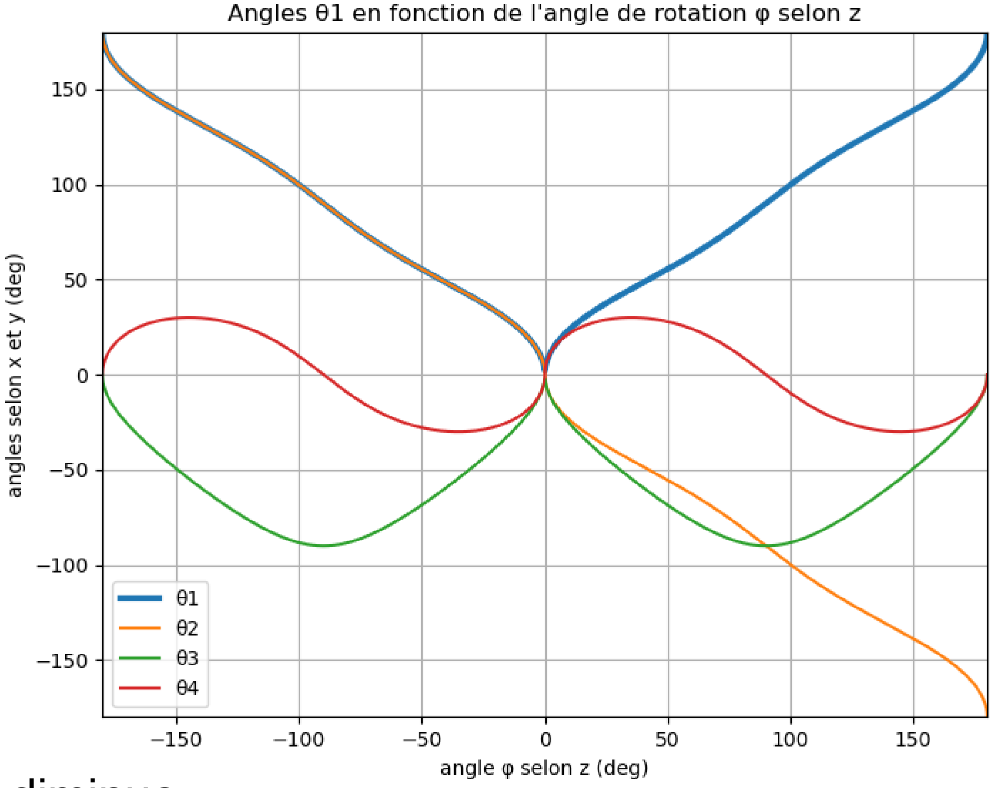
Commande du robot

Rotation selon l'axe vertical

Approche par succession de 4 rotations

- En imposant $\theta_1 = \theta_2$ ou $\theta_1 = -\theta_2$, on trouve une solution satisfaisante :



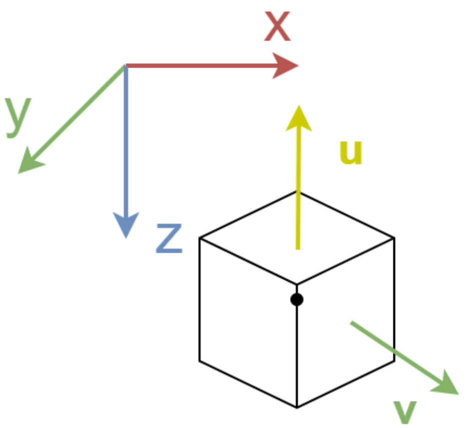


- On a bien la propriété souhaitée lorsque l'angle φ diminue
- C'est cette succession qui est utilisée pour la régulation en cap

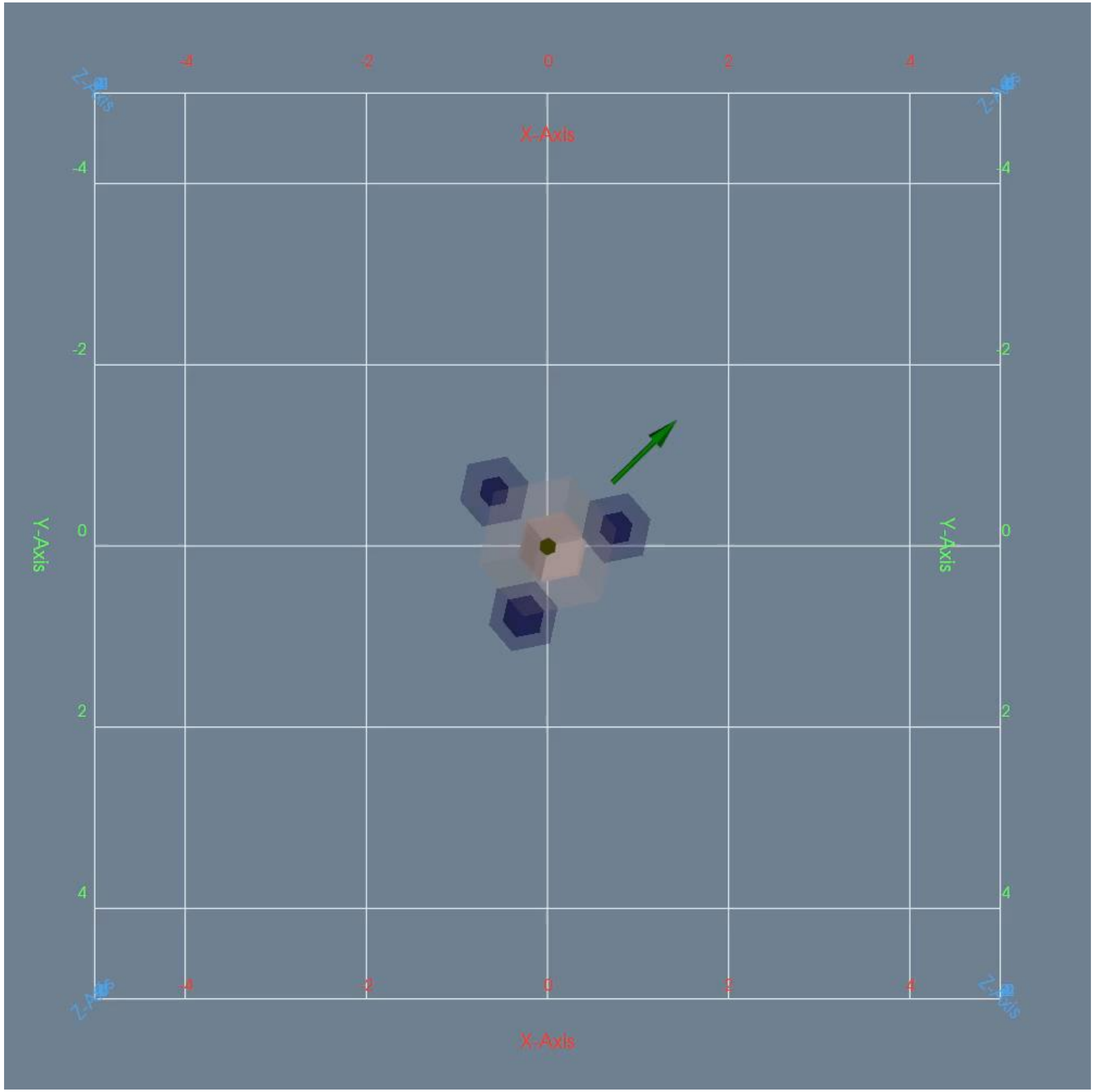
Commande du robot
Rotation selon l'axe vertical

Exemple en simulation (vue du haut) :

- Conditions initiales :
  - **u** est bien placé vers le haut
  - **v** n'est pas aligné à **x**



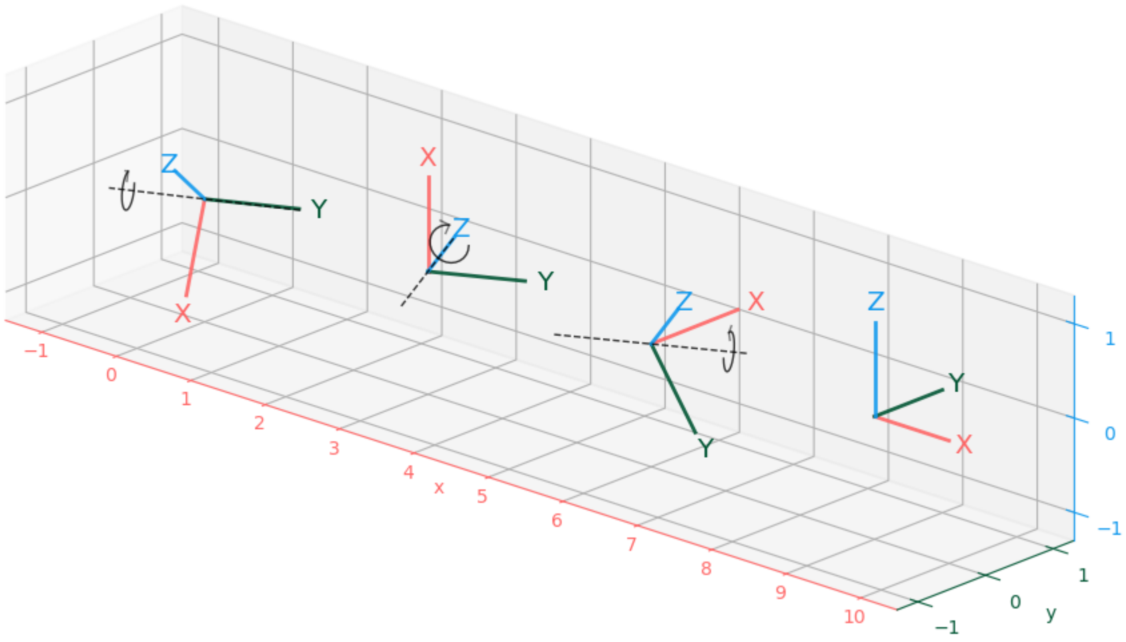
- Objectif :
  - Aligner **v** à **x** en tournant autour de **z**



Commande du robot
Commande complète

Commande complète réalisée en étapes successives

1. Approche de l'orientation et du cap en 3 rotations :



Amener z dans le plan

Tourner autour de z selon l'orientation souhaitée

Amener z vers le haut

2. Stabilisation de l'orientation sans cap et de la profondeur
3. Stabilisation du cap par cycles de 4 rotations successives

Commande du robot
Récapitulatif

Exemple en simulation

- Objectif :
  - Orienter complètement le robot
  - Se placer en z = 2

Les différentes étapes :

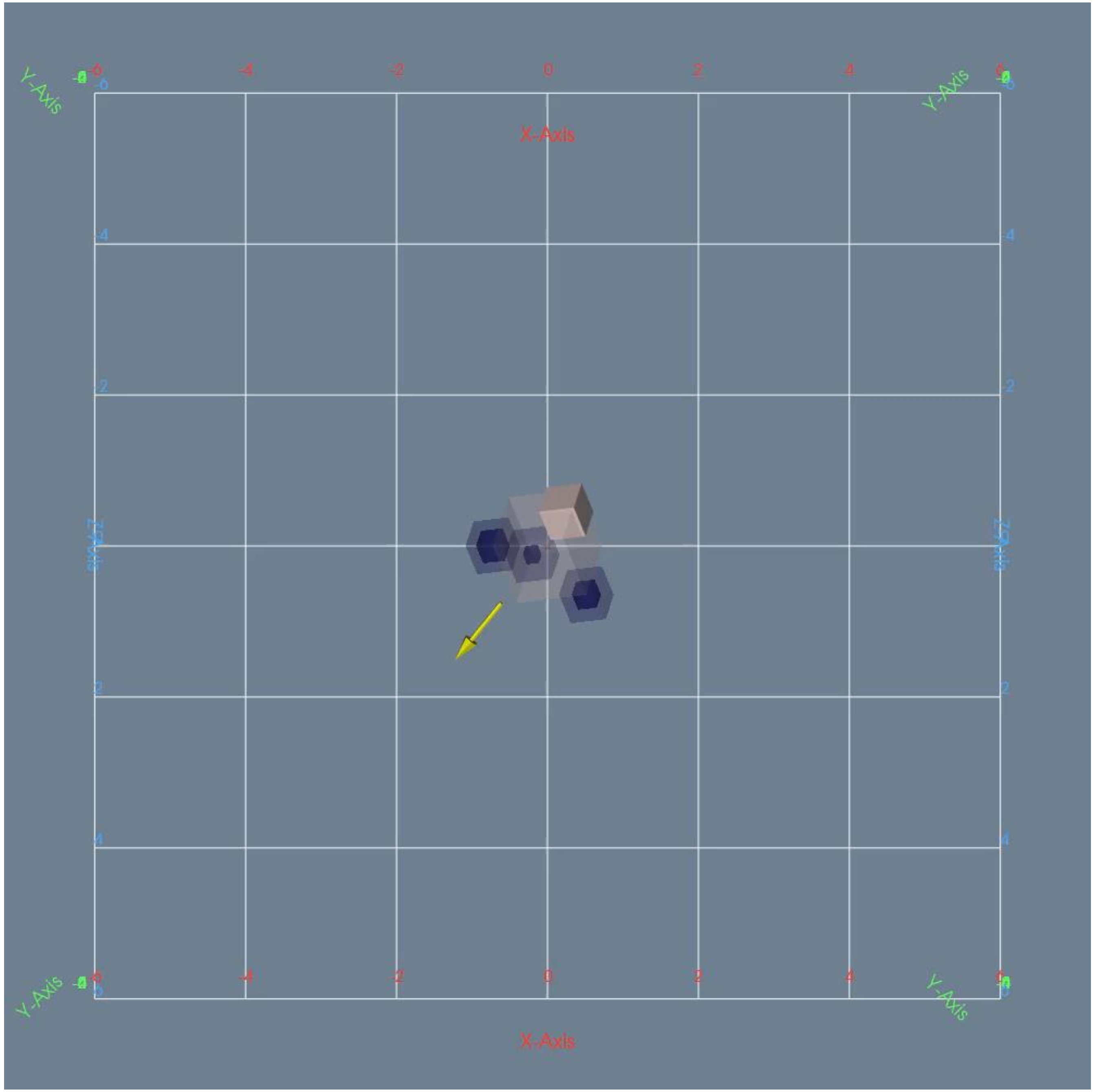
Approche en 3 rotations

↓

Stabilisation
orientation sans cap
et profondeur

↓

Stabilisation du cap
par cycles de 4 rotations

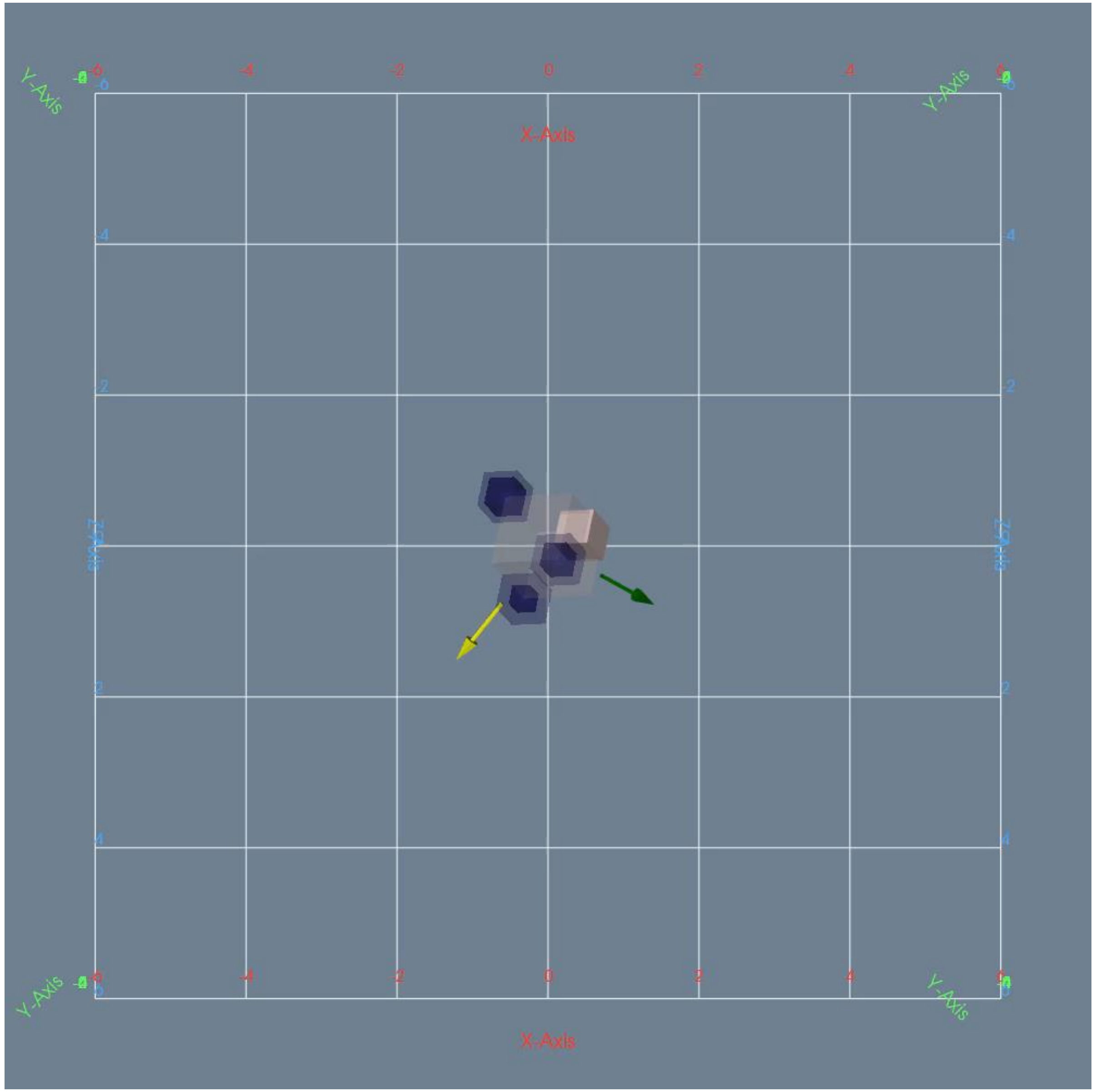


Merci de votre attention

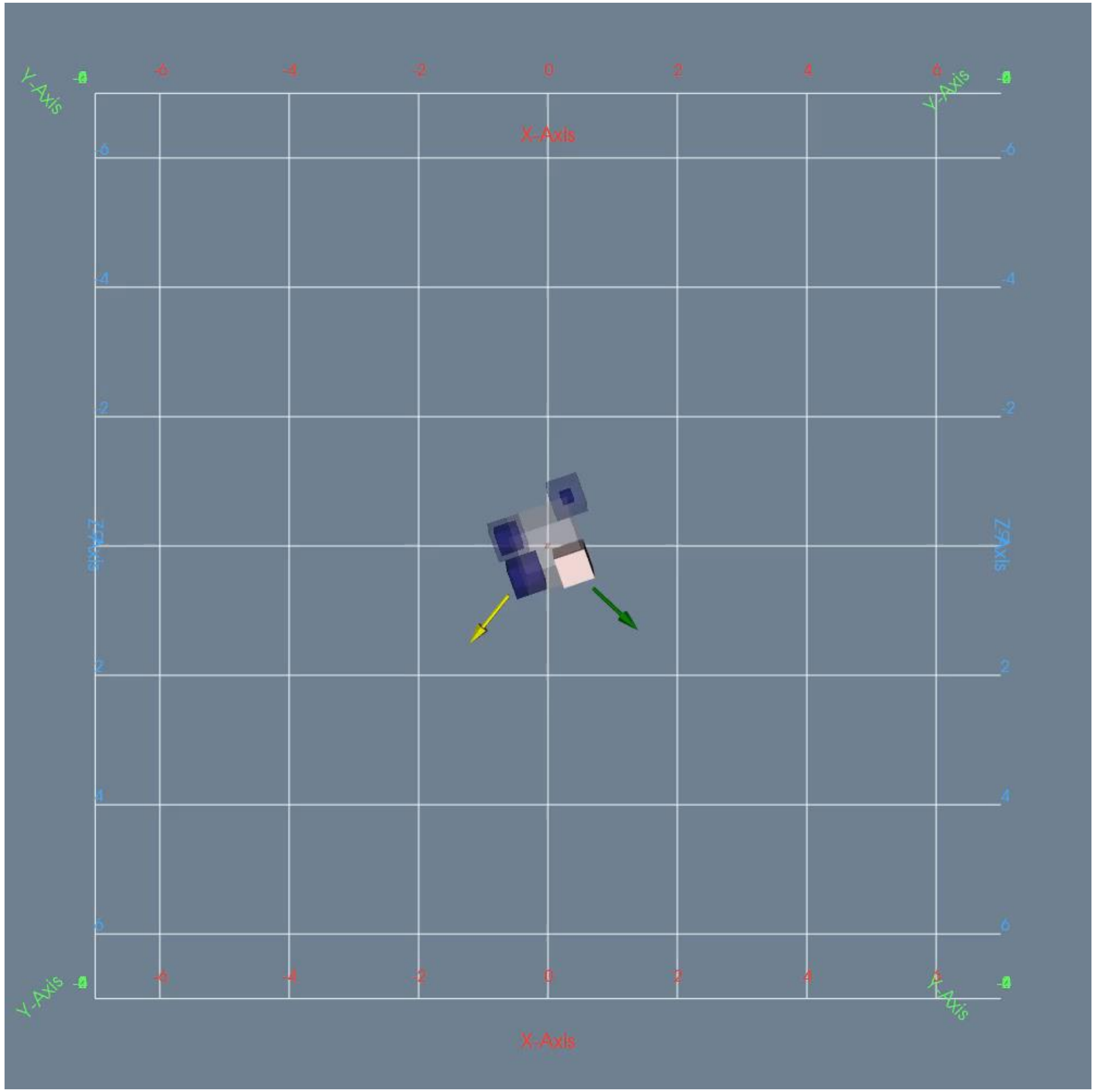
Mathis Riera, stage de M2

Annexe

Autre exemple avec une orientation moins favorable



Annexe
Autre exemple qui sort des bornes



Annexe

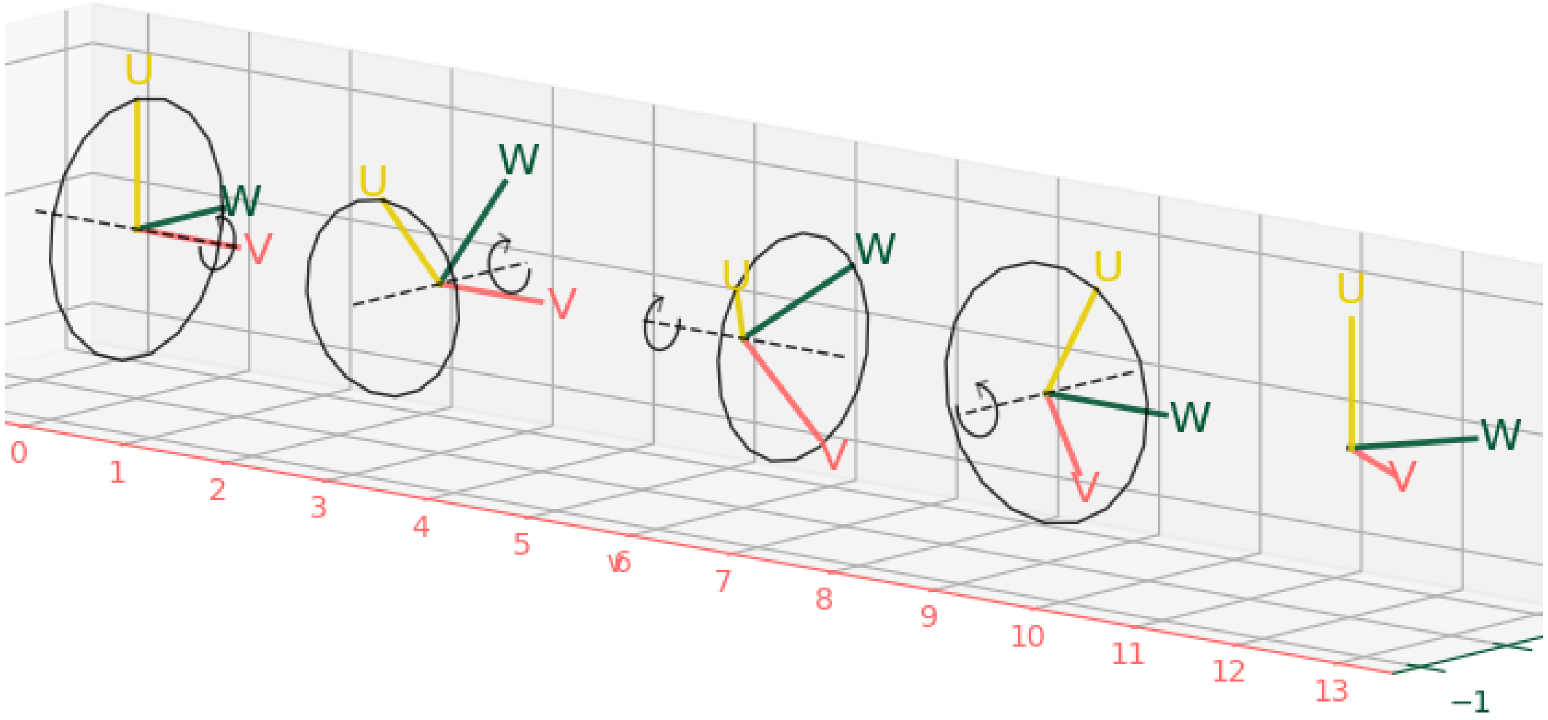
Détail de la combinaison de 4 rotations

Trouver θ_3 et θ_4 donnant une rotation selon z

- On suit **u** après les 2 rotations d'angle θ_1 et θ_2 : il faut le ramener à son orientation initiale
- La dernière rotation d'angle θ_4 déplace **u** dans un plan // à (**x**, **z**)
- Il faut donc que la rotation d'angle θ_3 ramène u dans le plan (O, **x**, **z**)

$$\theta_3 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } \cos\theta_2 = 0 \\ -\arctan\left(\frac{\tan\theta_1}{\cos\theta_2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta_4 = -\arcsin\left(\cos\theta_1 \sin\theta_2\right)$$



Annexe

Détail de la combinaison de 4 rotations

Trouver l'angle φ de la rotation obtenue selon z

- Composition des quaternions → sin et cos de φ/2

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\sin\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right) - \cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\sin\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\cos\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right) - \sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right)$$

Trouver les angles θ_i en fonction de φ

- On montre que dans le cas $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, et avec les θ_3 et θ_4 définis, on a :

$$\sin\varphi = \sin\theta_2 \sin\theta_3 = \frac{-\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^2\theta}}$$

- On obtient un polynôme en $\sin^2\theta$, à résoudre en fonction des quadrants
- On trouve bien une solution analytique (slide 14)