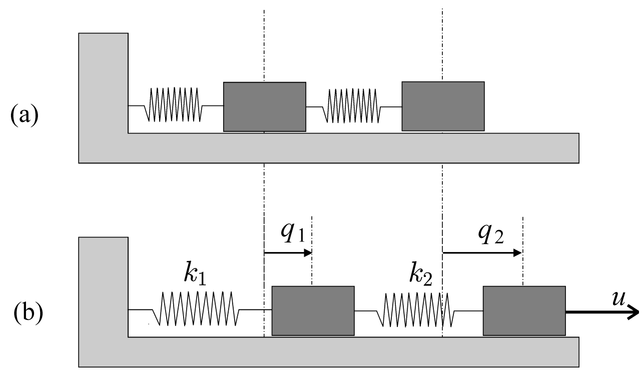
TD - ENSTA-Bretagne 1ère année
Automatique, 2012-2013
Luc Jaulin

1. Modélisation

Exercice .1. *Système masses-ressorts*



(a) système au repos, (b) système dans un état quelconque

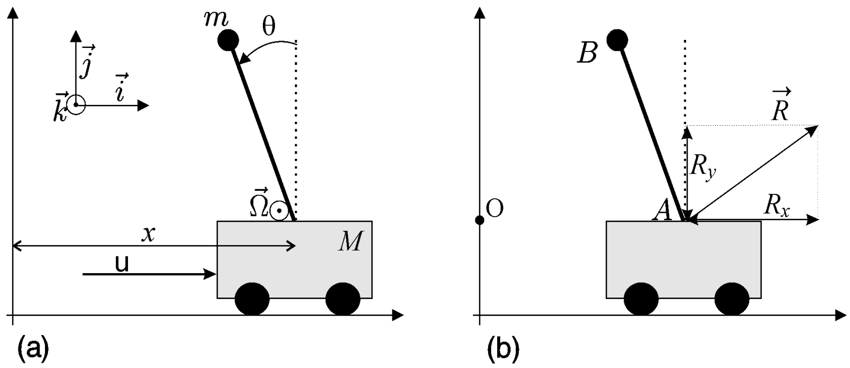
On considère le système d'entrée u et de sortie q_1 de la figure ci-dessus (u est la force appliquée sur le deuxième chariot, q_i est l'écart du $i^{\text{ième}}$ chariot par rapport à sa position d'équilibre, k_i est raideur du $i^{\text{ième}}$ ressort, α est le coefficient de frottement visqueux). Prenons pour vecteur d'état

$$\mathbf{x} = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^{\mathrm{T}} .$$

1) Trouver les équations d'état du système.
2) Ce système est-il linéaire ?

Exercice .2. *Pendule inversé*

On considère le système, appelé *pendule inversé,* formé d'un pendule de longueur ℓ posé en équilibre instable sur un chariot roulant, comme représenté sur la figure. La quantité u est la force exercée sur le chariot de masse M, x indique la position du chariot, θ est l'angle entre le pendule et la verticale et $\vec{R}$ est la force exercée par le chariot sur le pendule. A l'extrémité B du pendule est fixée une masse ponctuelle m. On négligera la masse de la tige du pendule. Enfin, A est le point d'articulation entre la tige et le chariot et $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ est le vecteur de rotation associé à la tige.



Pendule inversé

1) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué sur le chariot et le pendule.

2) Montrer que le vecteur vitesse du point B s'exprime par la relation $\mathbf{v}_B = \left(\dot{x} - \dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{\jmath}$. Calculer l'accélération $\dot{\mathbf{v}}_B$ du point B.

3) Pour modéliser le pendule inversé, on prendra pour vecteur d'état $\mathbf{x} = \left(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$. Justifier ce choix.

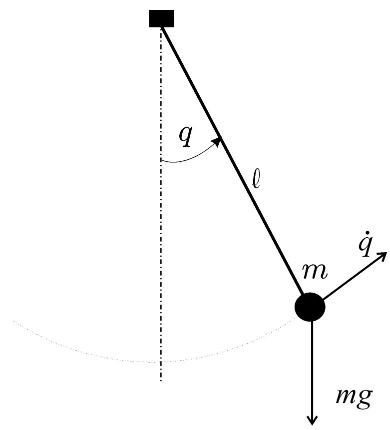
4) Trouver les équations d'état pour le pendule inversé.

Exercice .3. *Méthode d'Hamilton*

La méthode d'Hamilton permet d'obtenir les équations d'état d'un système mécanique conservatif (c'est-à-dire dont l'énergie se conserve) uniquement à partir de l'expression d'une seule fonction : son énergie. Pour cela, on définit l'*hamiltonien* comme l'énergie mécanique du système, c'est-à-dire la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. L'hamiltonien peut s'exprimer comme une fonction $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ des degrés de liberté $\mathbf{q}$ et des quantités de mouvement (ou des moments cinétiques dans le cas d'une rotation) $\mathbf{p}$ associées. Les équations d'Hamilton s'écrivent

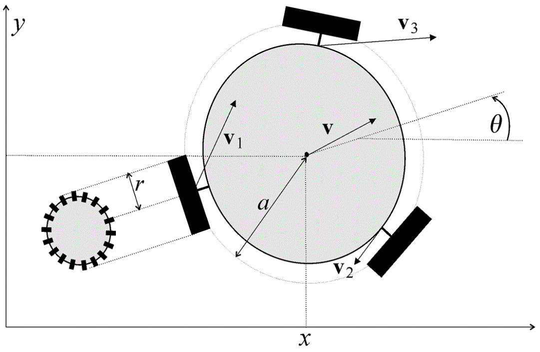
$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{q}} & = & \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} & = & -\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}}. \end{array}$$

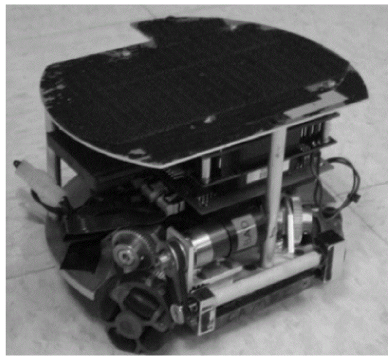
1) On considère le pendule simple représenté sur la figure ci-dessous. Ce dernier a une longueur ℓ et composé d'une seule masse ponctelle m. Calculer l'hamiltonien du système. En déduire ses équations d'état.



2) Montrer que si un système est décrit par les équations d'Hamilton, l'hamiltonien est constant.

Exercice .4. *Robot omni-directionnel*





On considère le robot à trois roues suédoises représenté ci-dessus.

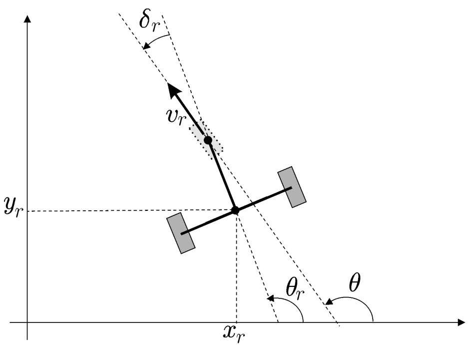
1) Donner les équations d'état du système. On prendra comme vecteur d'état $\mathbf{x} = (x, y, \theta)$ et comme vecteur d'entrée $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ correspondant aux vitesses de rotation des trois roues.

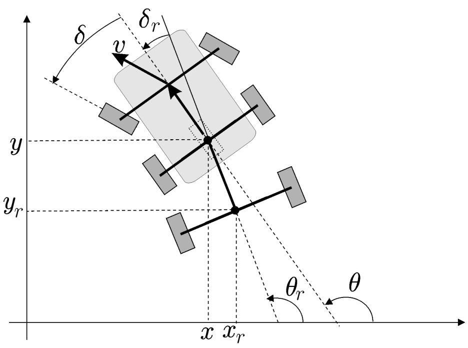
2) Proposer un bouclage qui permette d'avoir un modèle char décrit par les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= u_1 \\ \dot{v} &= u_2. \end{cases}$$

Exercice .5. *Système voiture-remorque*

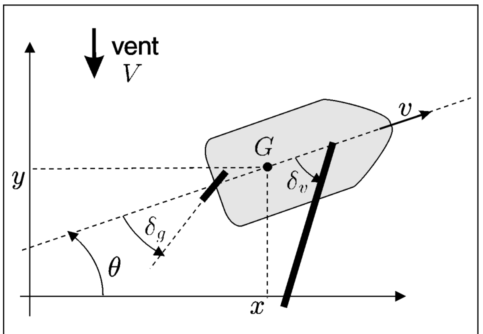
On considère la voiture étudiée en cours. Rajoutons une remorque à cette voiture dont le point d'attache est le milieu de l'essieu arrière de la voiture. Trouver les équations d'état du système voiture-remorque.



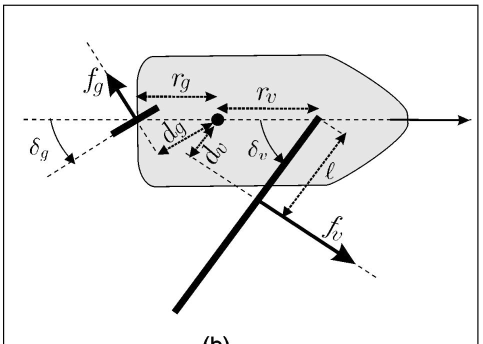


Exercice .6. *Voilier*

On considère le bateau à voile représenté sur la figure ci-dessous.



(a)



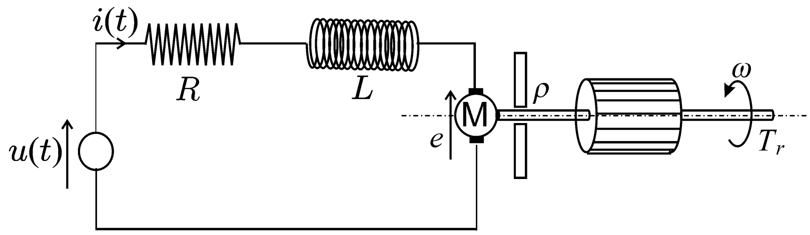
(b)

Le vecteur d'état $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \delta_v, \delta_g, v, \omega)^{\mathrm{T}}$, de dimension 7, est composé des coordonnées x, y du centre de gravité G du bateau (la dérive se trouve en G), de l'orientation θ, de l'angle δ_v de la voile, de l'angle δ_g du gouvernail, de la vitesse v du centre de gravité G et la vitesse angulaire ω du bateau. Les entrées u_1 et u_2 du système sont les dérivées des angles δ_v et δ_g. Les paramètres (supposés connus et constants) sont : V la vitesse du vent, r_g la distance du gouvernail à G, r_v la distance du mât à G, α_g la portance du gouvernail (si le gouvernail se trouve perpendiculaire à la marche du bateau, l'eau exerce une force de $\alpha_g v$ Newton sur le gouvernail), α_v la portance de la voile (si la voile se trouve immobile, perpendiculaire au vent, ce dernier exerce une force de $\alpha_v V$ Newton), α_f le coefficient de frottement du bateau sur l'eau dans le sens de la marche (l'eau exerce sur le bateau une force opposée au sens de la marche égale à $\alpha_f v$), α_θ le coefficient angulaire de frottement (l'eau exerce sur le bateau un couple de frottement égal à $-\alpha_\theta \omega$; étant donné la forme du bateau, plutôt profilé pour garder un cap, α_θ sera grand devant α_f), J le moment d'inertie du bateau, ℓ la distance entre le centre de poussée de la voile et le mât, β le coefficient de dérive (lorsque la voile du bateau est relâchée, le bateau tend à dériver, dans le sens du vent, à une vitesse égale à βV). Le vecteur d'état est composé des coordonnées de position, c'est-à-dire les coordonnées x, y du centre d'inertie du bateau, l'orientation θ, et les angles δ_v et δ_g de la voile et du gouvernail et des coordonnées cinématiques v et ω représentant respectivement la vitesse du centre de rotation G et la vitesse angulaire du bateau.

Trouver les équations d'état pour notre système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, où $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \delta_v, \delta_g, v, \omega)^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$.

Exercice .7. *Moteur à courant continu*

Un moteur à courant continu peut être décrit par la figure suivante, où u est la tension d'alimentation du moteur, i est le courant absorbé par le moteur, R est la résistance de l'induit, L est l'inductance de l'induit, e est la force electromotrice, ρ est le coefficient de frottement dans le moteur, ω est la vitesse angulaire du moteur et T_r est le couple exercé par le moteur sur la charge.



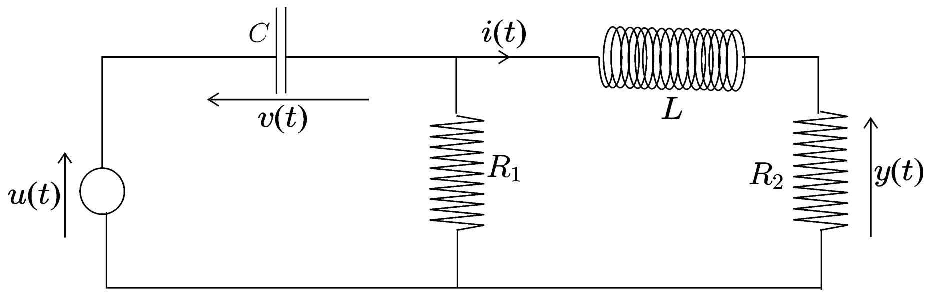
On rappelle les équations d'un moteur à courant continu idéal : $e = K\Phi\omega$ et $T = K\Phi i$. Dans le cas d'un moteur à excitation indépendante, ou à aimants permanents, le flux Φ est constant. Nous allons nous placer dans cette situation.

1) On prendra pour entrées du système T_r et u. Trouver les équations d'état.

2) On branche en sortie du moteur un ventilateur de caractéristique $T_r = \alpha\omega^2$. Donner les nouvelles équations d'état du moteur.

Exercice .8. *Circuit RLC*

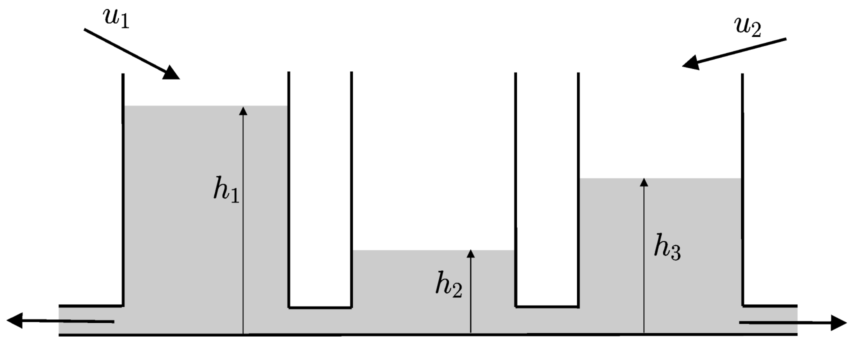
Le système ci-dessous a pour entrée la tension $u(t)$ et pour sortie la tension $y(t)$. Trouver les équations d'état du système. S'agit-il d'un système linéaire ?



Circuit électrique à modéliser

Exercice .9. *Les trois bacs*

On considère le système comprenant trois bacs et représenté sur la figure.



Système constitué de trois bacs contenant de l'eau et reliés par deux canaux

L'eau des bacs 1 et 3 peut se déverser vers le bac 2, mais aussi vers l'extérieur se trouvant à pression atmosphérique. Les débits associés sont, d'après la relation de Toricelli, donnés par

$$
\begin{aligned}
Q_{1\text{ext}} &= a.\sqrt{2gh_1}, \\
Q_{3\text{ext}} &= a.\sqrt{2gh_3}.
\end{aligned}
$$

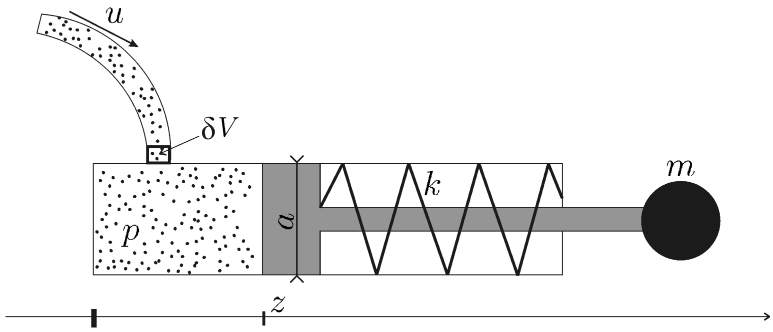
De même le débit d'un bac i vers un bac j est donné par

$$Q_{ij} = a.sign\,(h_i - h_j)\,\sqrt{2g|h_i - h_j|}.$$

Les variables d'état de ce système qui peuvent être considérées sont les hauteurs dans les bacs. Pour simplifier, nous supposerons que la surface des bacs sont toutes égales à 1 m^2, ainsi, le volume d'eau dans un bac se confond avec la hauteur. Trouver les équations d'état décrivant la dynamique du système.

Exercice .10. *Vérin*

On considère le vérin pneumatique avec ressort de rappel. Un tel vérin est souvent qualifié de simple effet car l'air sous pression n'existe que dans une des deux chambres.



Vérin simple effet

Les paramètres de ce système sont la raideur du ressort k, la surface du piston a et la masse m en bout de piston (les masses de tous les autres objets sont négligées). On suppose que tout se passe à température constante T_0. Nous prendrons pour vecteur d'état $\mathbf{x} = (z, \dot{z}, p)$ où z est la position du vérin, $\dot{z}$ sa vitesse et p la pression dans la chambre. L'entrée du système est le débit volumique u d'air vers la chambre du vérin. Pour simplifier, nous supposerons que le vide règne dans la chambre du ressort et que lorsque pour $z = 0$ (le vérin est en butée gauche) le ressort se trouve en position d'équilibre. Trouver les équations d'état du vérin pneumatique.

Exercice .11. *Suite de Fibonacci*

Il s'agit d'étudier l'évolution du nombre $y(k)$ de couples de lapins dans un élevage en fonction de l'année k. L'année 0, il y a un seulement un couple de lapins nouveau-nés dans l'élevage (donc $y(0) = 1$). Les lapins ne deviennent fertiles que un an après leur naissance. Donc à l'année 1, il y a toujours un seul couple de lapins, mais ce couple est fertile (donc $y(1) = 1$). Un couple fertile donne naissance chaque année à un autre couple de lapins. Donc à l'année 2, il y a un couple de lapin fertile et un couple de nouveaux-nés. Cette évolution peut être décrite par le tableau suivante, où N signifie *nouveau né* et A signifie *adulte*.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
N	A	A	A	A
		N	A	A
			N	A
				N
				N

Appelons $x_1(k)$ le nombre de couples nouveaux-nés, $x_2(k)$ le nombre de couples fertiles et $y(k)$ le nombre total de couples.

1) Donner les équations d'état qui régissent le système.

2) Donner la relation de récurrence satisfaite par $y(k)$.

---

2. Simulation

Exercice .12. *Simulation d'un pendule*

On considère un pendule décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin \theta}{\ell},$$

où θ représente l'angle du pendule. On prendra $g = 9.81ms^{-2}$ et $\ell = 1m$. On initialise le pendule à l'instant $t = 0$ avec $\theta = 1$rad et $\dot{\theta} = 0$ rad.s^{-1}. Puis, on lâche le pendule. Ecrire un petit programme (en vous influençant d'une syntaxe de type Matlab) qui détermine l'angle du pendule à l'instant $t = 1s$. Le programme devra utiliser une méthode d'Euler.

Exercice .13. *Système de Van der Pol*

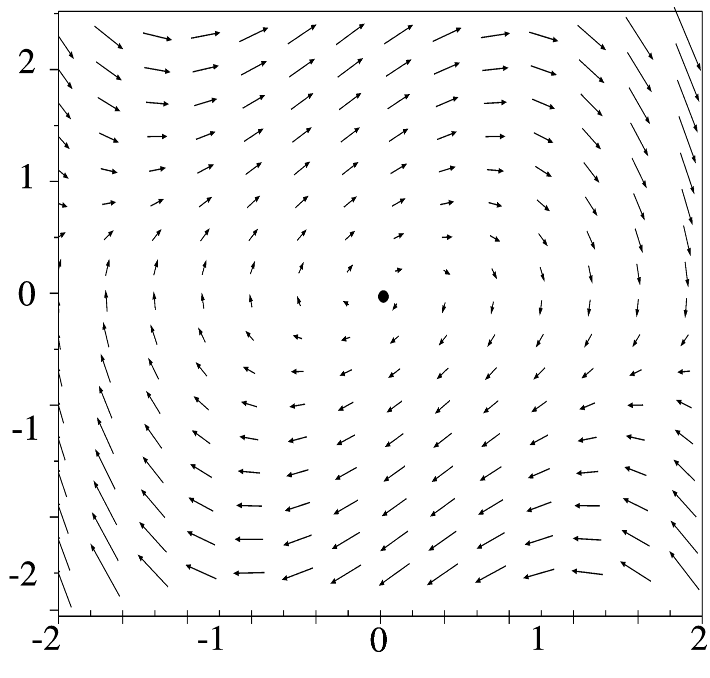
On considère le système décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y} + \left(y^2 - 1\right)\dot{y} + y = 0.$$

1) On choisit pour vecteur d'état $\mathbf{x} = (y \;\; \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Donner les équations d'état du système.

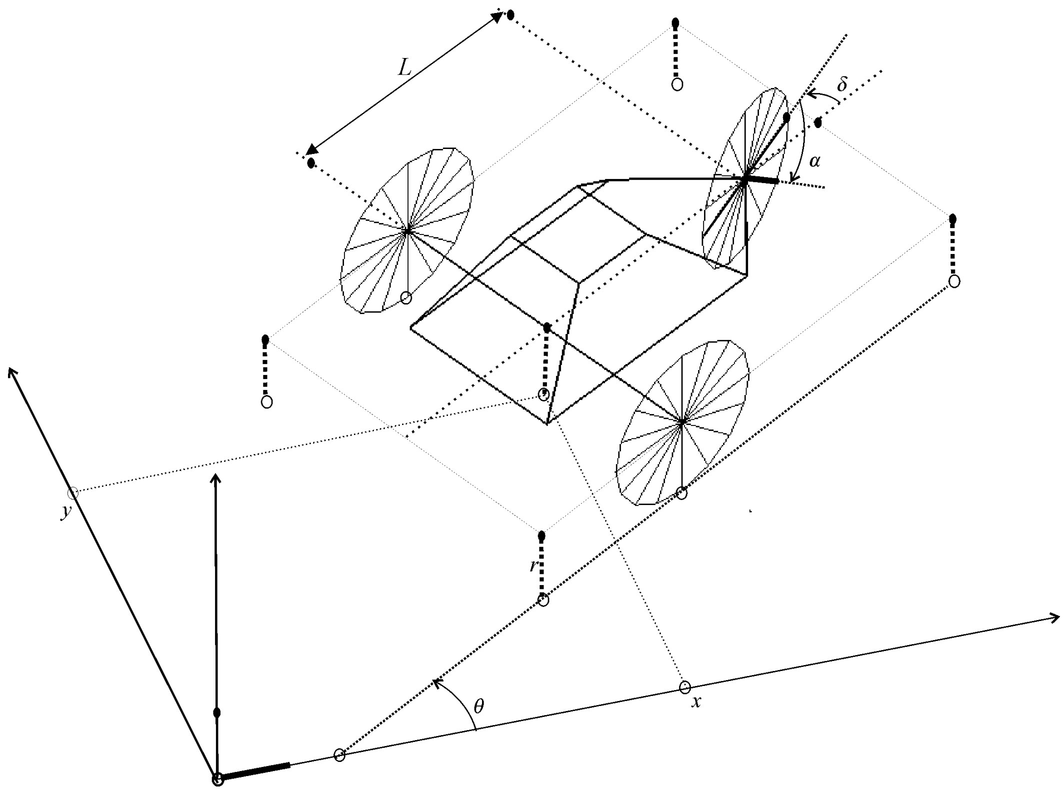
2) Linéariser ce système autour du point d'équilibre. Quels sont les pôles du système ? Le système est-il stable ?

3) Le champ de vecteur associé à ce système est représenté ci dessous dans l'espace d'état (x_1, x_2). On initialise le système en $\mathbf{x}_0 = (0.1 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$. Donner la forme de la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ du système dans l'espace d'état (vous pouvez dessiner directement sur la figure). Donner la forme de $y(t)$.



Exercice .14. *Rayon d'une roue de tricycle*

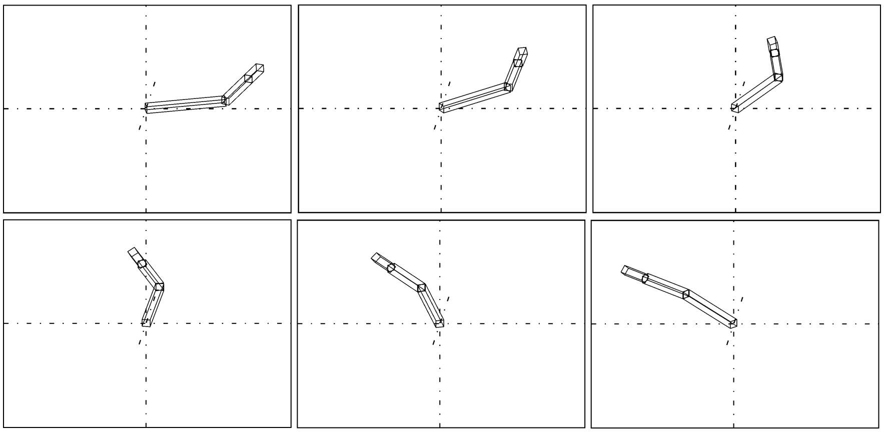
On considère la représentation 3D du tricycle de la figure ci-dessous. Sur cette figure les petits disques noirs sont sur un même plan horizontal de hauteur r et les petits disques creux sont sur le même plan horizontal de hauteur nulle.



Le rayon de la roue avant en gras possède un angle α avec le plan horizontal, comme représenté sur la figure. Donner en fonction de $x, y, \theta, \delta, \alpha, L, r$, l'expression de la matrice de transformation (en coordonnées homogènes) qui relie le rayon positionné sur l'axe Ox (en gras) avec celui (en gras) de la roue avant. L'expression aura la forme d'un produit de matrices.

Exercice .15. *Bras manipulateur*

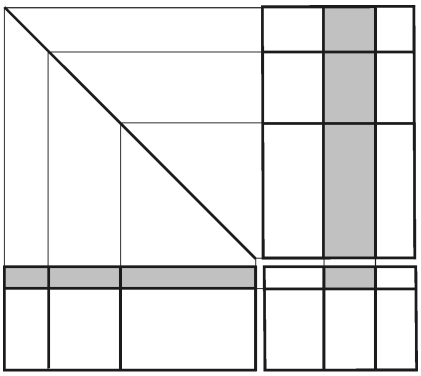
Le robot manipulateur représenté ci-dessous est composé de trois bras en série. Le premier, de longueur 3, peut pivoter en l'origine autour de l'axe Oz. Le second, de longueur 2, placé au bout du premier peut lui aussi pivoter autour de l'axe Oz. Quant au troisième, de longueur 1, placé au bout du second, il peut pivoter autour de l'axe formé par le second bras. Ce robot admet 3 degrés de liberté $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, où les α_i représentent les angles formés par chacun des bras. Le motif de base choisi pour la représentation de chacun des bras est le cube unité. Chacun des bras est supposé être un parallélépipède d'épaisseur 0.3. Afin de prendre la forme du bras, le motif doit subir une affinité, représentée par une matrice diagonale. Ensuite, il doit subir une suite de rotations et de translations afin de le positionner correctement. Concevez un programme (pseudo-code, SCILAB ou MATLAB) qui simule ce système, avec une vision 3D, inspirée de la figure.



3. Systèmes linéaires

Exercice .16. *Multiplication par blocs*

Pour multiplier par blocs deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on les dispose comme ci-dessous, en traçant la diagonale des correspondances. On multiplie alors les blocs en respectant les règles usuelles.



Calculer le produit matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice .17. *Changement de base vers une forme compagnon*

Considérons un système avec une entrée décrit par l'équation d'évolution

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Notons, que la matrice de commande classiquement notée $\mathbf{B}$ devient, dans notre cas à une seule entrée, un vecteur $\mathbf{b}$. Prenons pour matrice de changement de base (supposée inversible)

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{b} \mid \mathbf{Ab} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right).$$

Le nouveau vecteur d'état est donc $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$. Montrer que, dans cette nouvelle base, les équations d'état s'écrivent

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \vdots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

où les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$.

Exercice .18. *Solutions des équations d'état linéaires*

Rappel sur les exponentielles de matrices. Afin de résoudre notre équation différentielle, nous allons utiliser la notion d'*exponentielle de matrice*, que nous allons brièvement rappeler. L'exponentielle d'une matrice carrée $\mathbf{M}$ de dimension n se définit par son développement en séries entière :

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_n + \mathbf{M} + \frac{1}{2!}\mathbf{M}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{M}^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\mathbf{M}^i$$

où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité de dimension n. Il est clair que $e^{\mathbf{M}}$ est de la même dimension que $\mathbf{M}$. Voici quelques-unes des propriétés importantes concernant les exponentielles de matrices. Si $\mathbf{0}_n$ est la matrice nulle de dimension $n \times n$ et si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont deux matrices $n \times n$, alors

$$\begin{array}{l} e^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{I}_n, \\ e^{\mathbf{M}}.e^{\mathbf{N}} = e^{\mathbf{M}+\mathbf{N}}, \ \text{(si les matrices commutent)} \\ \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{M}t}\right) = \mathbf{M}e^{\mathbf{M}t}. \end{array}$$

Problème posé. Soit le système linéaire décrit par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t). \end{array} \right.$$

Notons $\mathbf{x}(t_0)$, l'état à l'instant initial t_0. Montrer que la solution de cette équation différentielle est

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t).$$

La fonction $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)$ est appelée *solution homogène*, *libre* ou *transitoire*. La fonction $\int_{t_0}^{t} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t)$ est appelée *solution forcée*.

Exercice .19. *Formule de Rodrigues*

Soit un corps solide dont le centre de gravité reste à l'origine d'un repère galiléen et en rotation autour d'un axe Δ. La position d'un point $\mathbf{x}$ du solide satisfait l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x},$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation Δ et $||\boldsymbol{\omega}||$ est la vitesse de rotation du solide (en rad.s^{-1}).

1) Montrer que cette équation d'état peut se mettre sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi la matrice $\mathbf{A}$ est souvent notée $\boldsymbol{\omega}\wedge$.

2) Donner l'expression de la solution de l'équation d'état.

3) En déduire que l'expression de la matrice de rotation $\mathbf{R}$ d'angle $||\boldsymbol{\omega}||$ autour de $\boldsymbol{\omega}$ est donnée par la formule, dite *formule de Rodrigues*,

$$\mathbf{R} = e^{\boldsymbol{\omega}\wedge}.$$

4) Calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et montrer que $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. Interpréter.

5) Quelles sont les valeurs propres de $\mathbf{R}$.

Exercice .20. *Simplification pôle-zéro*

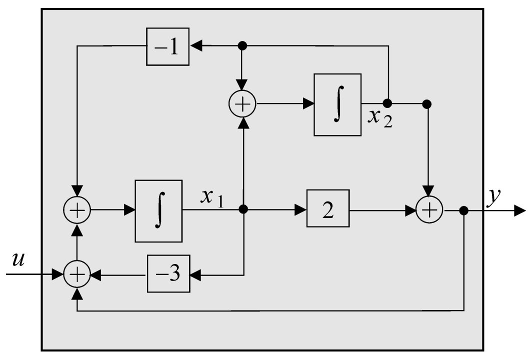
On considère le système décrit par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ y &= x + u \end{cases}$$

Calculer l'équation différentielle liant y à u, par la méthode différentielle, puis par la méthode de Laplace (en s'interdisant toute simplication pôle-zéro).

Exercice .21. *Equations d'état d'un câblage*

On considère le système $\mathcal{S}$ décrit par le câblage ci-dessous.



1) Donner ses équations d'état sous forme matricielle

2) Calculer le polynôme caractéristique du système. Le système est-il stable ?

3) Calculer la fonction de transfert du système.

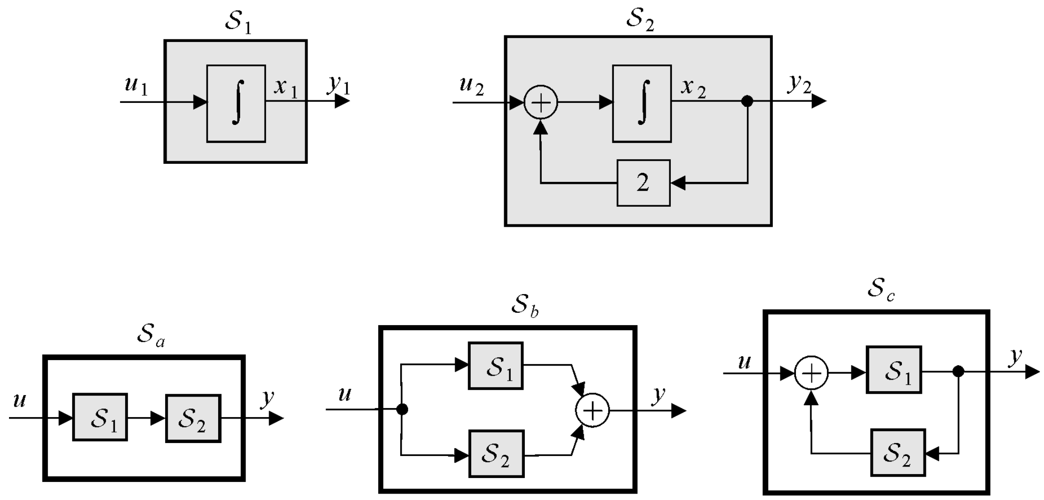
Exercice .22. *Combinaison de systèmes*

On considère les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ donnés sur la figure ci-dessous.

1) Donner les équations d'état sous forme matricielle du système $\mathcal{S}_a$ obtenu en mettant les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en série. Donner la fonction de transfert et polynôme caractéristique de $\mathcal{S}_a$.

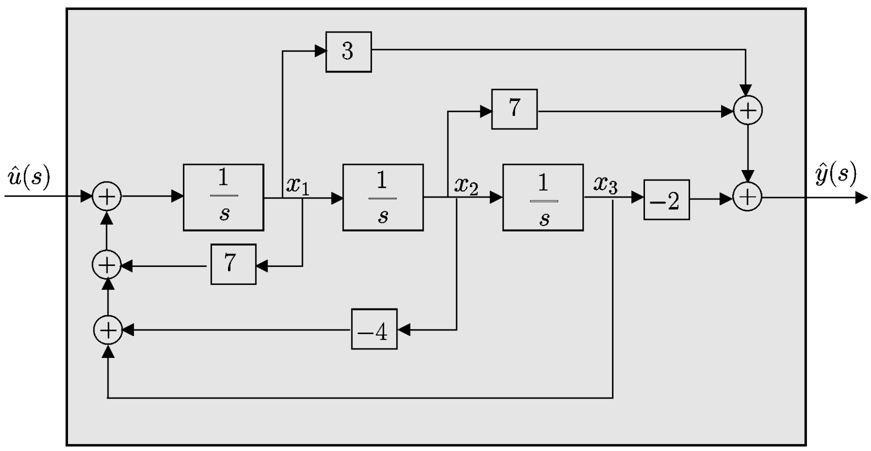
2) Faire de même avec le système $\mathcal{S}_b$ obtenu en mettant les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en parallèle.

3) Faire de même avec le système $\mathcal{S}_c$ obtenu en bouclant $\mathcal{S}_1$ par $\mathcal{S}_2$ comme représenté sur la figure.



Exercice .23. *Calcul d'une fonction de transfert*

Considérons le système dont le câblage est donné par la figure ci-dessous.



Système d'ordre 3 composé de trois intégrateurs

1) Calculer la fonction de transfert $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ de ce système. Pour cela, nous noterons, x_i la sortie du $i$ème intégrateur.

2) Donner une représentation d'état pour ce système.

3) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'évolution $\mathbf{A}$.

Exercice .24. *Matrice de transfert*

On considère le système linéaire à temps continu décrit par sa représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t). \end{array} \right.$$

1) Calculer sa matrice de transfert $\mathbf{G}(s)$.

2) En déduire une relation différentielle entrée-sortie pour ce système.

Exercice .25. *Forme canonique de commande*

On considère le système linéaire d'ordre 3 (bien que tous le raisonnement puissent être effectué pour un ordre quelconque) avec une seule entrée et une seule sortie, décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\dot{y} + a_0y = b_2\frac{d^2u}{dt^2} + b_1\frac{du}{dt} + b_0u.$$

1) Calculer sa fonction de transfert $G(s)$.

2) En remarquant que ce système peut être obtenu en mettant en série les deux systèmes de fonctions de transfert

$$G_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad \text{et} \quad G_2(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0,$$

en déduire un câblage avec seulement trois intégrateurs, des additionneurs et des amplificateurs.

3) Donner les équations d'état associées à ce câblage.

Exercice .26. *Forme canonique d'observation*

Considérons à nouveau le système décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\dot{y} + a_0y = b_2\frac{d^2u}{dt^2} + b_1\frac{du}{dt} + b_0u.$$

1) Montrer que dans le domaine de Laplace, cette équation différentielle peut s'écrire

$$\hat{y} = \frac{1}{s}\left\{(b_2\hat{u} - a_2\hat{y}) + \frac{1}{s}\left[(b_1\hat{u} - a_1\hat{y}) + \frac{1}{s}\left(b_0\hat{u} - a_0\hat{y}\right)\right]\right\}$$

où $\hat{u}$ et $\hat{y}$ désignent les transformées de Laplace de $u(t)$ et $y(t)$.

2) En déduire un câblage avec seulement trois intégrateurs, des additionneurs et des amplificateurs.

3) Donner les équations d'état associées à ce câblage.

4) Comparer avec les résultats obtenus à l'exercice précédent.

Exercice .27. *Forme modale*

Un système linéaire monovariable est sous forme *modale* s'il s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}u\\ y & = & \begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\mathbf{x} + d\ u.\end{array}\right.$$

1) Dessiner un câblage pour ce système à l'aide d'intégrateurs, d'additionneurs et d'amplificateurs.

2) Calculer la fonction de transfert associée à ce système.

3) Calculer son polynôme caractéristique.

Exercice .28. *Forme de Jordan*

Le système décrit par les équations d'état

$$\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}u\\ y & = & \begin{pmatrix}-2 & -1 & 3 & -4 & 7\end{pmatrix}\mathbf{x}+2u\end{array}$$

est sous forme de Jordan car sa matrice d'évolution $\mathbf{A}$ est une matrice de Jordan. C'est-à-dire qu'elle est diagonale par bloc et que chaque bloc (ici il y en a deux) possède des zéros partout, sauf sur sa diagonale, qui contient des éléments tous égaux et sur sa sur-diagonale qui ne contient que des uns. De plus, la matrice de commande ne possède, pour élément non nuls, que des uns (autant que de blocs), positionnés au niveau de la dernière ligne de chaque bloc.

1) Dessiner un câblage pour ce système à l'aide d'intégrateurs, d'additionneurs et d'amplificateurs.

2) Calculer sa fonction de transfert.

3) Calculer son polynôme caractéristique.

---

4. Commande linéaire des systèmes linéaires

Exercice .29. *Etats non-observables, états non commandables*

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}u(t)\\ \mathbf{y}(t) & = & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + 1\ u(t)\end{array}\right.$$

1) Calculer sa fonction de transfert.

2) Ce système est-il stable ?

3) Tracer le câblage associé et en déduire quels sont les états non-observables et ceux qui sont non-commandables.

Exercice .30. *Utilisation des critères de commandabilité et d'observabilité*

Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \end{array} \right.$$

1) Pour quelles valeurs de a le système est-il commandable ?

2) Pour quelles valeurs de b le système est-il observable ?

Exercice .31. *Preuve du critère de commandabilité (en discret)*

Soit le système linéaire à temps discret

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

1) Montrer que

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \mathbf{x}(0) + \big(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ \dots \ \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\big) \begin{pmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que si la matrice $\big(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ \dots \ \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\big)$ est de rang plein, alors, pour tout vecteur initial $\mathbf{x}_0$, pour tout vecteur cible $\mathbf{x}_n$, on peut trouver une commande $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n-1)$ tel que le système initialisé en $\mathbf{x}_0$ atteigne $\mathbf{x}_n$, à l'instant $k = n$.

Exercice .32. *Preuve du critère de commandabilité (en continu)*

Soit le système linéaire à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer le critère de commandabilité dans le cas continu.

1) On suppose que

$$\mathrm{rang} \underbrace{\big(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \ \dots \ \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\big)}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{com}}} < n,$$

où $n = \dim \mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{com}}$ est la matrice de commandabilité. Soit $\mathbf{z}$ un vecteur non nul tel que $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{com}} = \mathbf{0}$. En utilisant la solution de l'équation d'état

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

montrer que la commande $\mathbf{u}$ ne peut influencer la quantité $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. En déduire que le système est non commandable.

2) Montrer que si $\mathrm{rang}(\Gamma_{\mathrm{com}}) = n$, pour tout couple $(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t_1))$, $t_1 > 0$, il existe une commande $\mathbf{u}(t), t \in [0, t_1]$ polynômiale qui conduit le système de l'état $\mathbf{x}(0)$ à l'état $\mathbf{x}(t_1)$. Ici, on se limitera à $t_1 = 1$, sachant que le principe de la preuve reste valide pour $t_1 > 0$ quelconque.

3) Conclure sur le critère de commandabilité.

Exercice .33. *Preuve du critère d'observabilité*

Soit le système linéaire à temps continu

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}} & = & \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{Cx}. \end{array}$$

1) Montrer que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

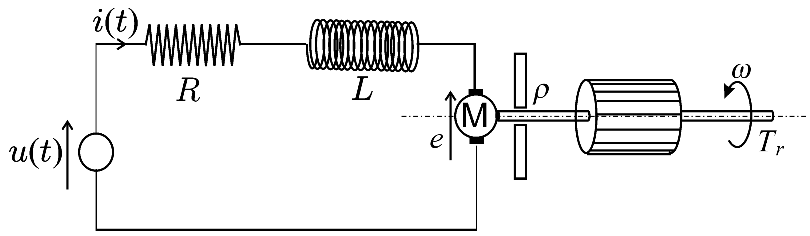
2) En déduire que si la matrice d'observabilité

$$\Gamma_{\mathrm{obs}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang plein, alors on peut on peut exprimer l'état $\mathbf{x}$ comme une fonction linéaire de $\mathbf{u}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)}, \mathbf{y}^{(n-2)}, \mathbf{y}^{(n-1)}$.

Exercice .34. *Commande proportionnelle et dérivée pour un moteur actionnant une pompe*

On considère le moteur à courant continu ci dessous.



Ses équations d'état sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{di}{dt} & = & -\frac{R}{L}i - \frac{\kappa}{L}\omega + \frac{u}{L} \\ \dot{\omega} & = & \frac{\kappa}{J}i - \frac{\rho}{J}\omega - \frac{T_r}{J} \end{array} \right.$$

où κ, R, L, J sont des paramètres constants du moteur. Les entrées sont la tension u et le couple T_r, les variables d'état sont i et ω. On utilise ce moteur pour pomper l'eau d'un puit. Dans ce cas, le couple utilisé est $T_r = \alpha\omega$, où α est un paramètre constant. On négligera ρ devant α. Il n'y a désormais plus qu'une seule entrée pour le système moteur+pompe : la tension u.

1) Donner les équations d'état du système moteur+pompe.

2) On choisit pour sortie $y = \omega$. Calculer la fonction de transfert du système moteur+pompe.

3) Donner l'équation différentielle associée à cette fonction de transfert.

4) On prend pour vecteur d'état $\mathbf{x} = (y, \dot{y})^{\mathrm{T}}$. Donner une représentation d'état du système sous forme matricielle.

5) Une commande *proportionnelle et dérivée* est une combinaison linéaire de la sortie y, de sa dérivée $\dot{y}$, et de la consigne w (attention à ne pas confondre la consigne w avec la vitesse de l'arbre moteur ω). Cette commande s'écrit sous la forme

$$u = hw - k_1 y - k_2 \dot{y}.$$

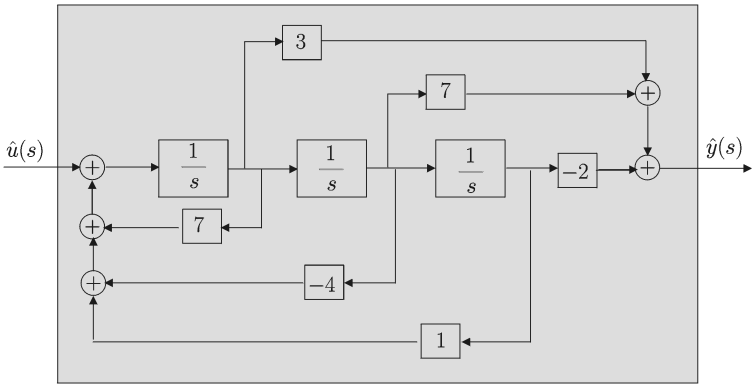
Donner les équations d'état du système moteur+pompe bouclé par une telle commande.

6) Donner les valeurs de k_1 et k_2 qu'il nous faut choisir pour avoir les pôles du système bouclé égaux à -1.

7) Trouver h de façon à ce que y converge vers w, lorsque la consigne w est constante.

Exercice .35. *Retour d'état pour un système d'ordre 3*

On considère le système décrit par la figure ci-dessous



On appelle x_1 la sortie du dernier intégrateur (à droite), x_2 le deuxième et x_3 le premier.

1) Donner les équations d'état de ce système. Quel est son polynôme caractéristique ?

2) On se propose de réguler ce système par un retour d'état de la forme

$$u = -\mathbf{Kx} + hw$$

où w est la consigne. Calculer $\mathbf{K}$ pour avoir tous les pôles égaux à -1.

3) On voudrait que, à l'équilibre (c'est-à-dire lorsque la consigne et la sortie ne bougent plus), on ait $y = w$. En déduire la valeur à prendre pour le précompensateur h.

Exercice .36. *Retour d'état avec effet intégral (cas simple)*

On considère le système décrit par les équations d'état

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y & = & x_1, \end{array} \right.$$

où u est l'entrée, y la sortie et $\mathbf{x}$ le vecteur d'état.

1) Donner le polynôme caractéristique du système. Le système est-il stable ? Pourquoi ?

2) On boucle le système par la commande par retour d'état suivante

$$u = \alpha \int_0^t \left(w(\tau) - x_1(\tau)\right) d\tau \quad - \quad \mathbf{Kx}, \quad \text{avec } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix},$$

où w est la consigne. Donner les équations d'état du régulateur (on appellera z la variable d'état du régulateur). Quels sont les pôles du régulateur ?

3) Donner les équations d'état du système bouclé.

4) Calculer $\mathbf{K}$ et α pour que tous les pôles soient égaux à -1.

5) On choisit une consigne $w = \bar{w}$ constante dans le temps. Vers quelles valeurs $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{z}$, convergent l'état $\mathbf{x}$ du système et l'état z du régulateur ? Vers quelle valeur $\bar{y}$ la sortie y converge-elle ?

6) On remplace maintenant la matrice d'évolution $\mathbf{A}$ par une autre matrice $\bar{\mathbf{A}}$ proche de $\mathbf{A}$, tout en gardant le même régulateur. Vers quelle valeur y va-t-elle converger.

Exercice .37. *Retour d'état avec effet intégral (cas général)*

On considère le système décrit par l'équation d'état $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{p}$ où $\mathbf{p}$ est un vecteur de perturbation inconnu et constant, censé représenter une perturbation extérieure qui n'a pu être prise en compte dans la modélisation (vent, pente du terrain, poids des personnes dans un ascenseur, ...). Nous poserons $m = \dim \mathbf{u}$ et $n = \dim \mathbf{x}$. Un régulateur par retour d'état avec effet intégral est de la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_i \int_0^t \left(\mathbf{w} - \mathbf{x}_c\right) dt - \mathbf{Kx}$$

où $\mathbf{w}$ est la consigne et $\mathbf{x}_c$ est un vecteur de même dimension que $\mathbf{u}$ représentant les variables d'état consignées (c'est-à-dire celles que l'on souhaite commander directement par l'intermédiaire de $\mathbf{w}$). Le vecteur $\mathbf{x}_c$ est relié à l'état $\mathbf{x}$ par la relation $\mathbf{x}_c = \mathbf{Ex}$, où $\mathbf{E}$ est une matrice connue.

1) Donner les équations d'état du système bouclé. On rappelle que l'état du système bouclé sera constitué de l'état $\mathbf{x}$ du système à réguler et du vecteur $\mathbf{z}$ des quantités mémorisées dans les intégrateurs. Donner les dimensions des quantités $\mathbf{w}, \mathbf{x}_c, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}$.

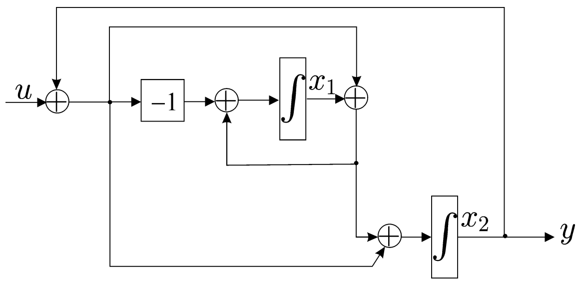
2) Montrer comment avec la fonction `ppol` de SCILAB ou `place` de MATLAB, nous pouvons choisir les matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_i$ de façon à ce que tous les pôles du système bouclé soient égaux à -1.

3) Montrer que, pour une consigne $\mathbf{w}$ et une perturbation $\mathbf{p}$ constantes et en régime permanent , nous aurons $\mathbf{x}_c = \mathbf{w}$. Quelle est alors la valeur de $\mathbf{p}$ (en fonction de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$) ?

4) Donner les équations d'état du régulateur.

Exercice .38. *Observateur*

On considère le système d'entrée u et de sortie y de la figure ci-dessous.



1) Donner, sous forme matricielle, une représentation d'état pour ce système. En déduire une simplification de câblage, que vous devrez dessiner.

2) Etudier la stabilité de ce système.

3) Donner la fonction de transfert de ce système.

4) Le système est-il commandable ? Est-il observable ?

5) Trouver un observateur qui permette de générer un état $\hat{\mathbf{x}}(t)$, tel que l'erreur $||\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}||$ converge vers zéro en e^{-t} (ce qui revient en fait à placer tous les pôles en -1). Vous donnerez cet observateur sous la forme d'équation d'état.

Exercice .39. *Démodulateur d'amplitude*

Un signal sinusoïdal de pulsation ω peut se mettre sous la forme

$$y(t) = a\cos(\omega t + b)$$

où les paramètres a et b sont inconnus. A partir de la mesure de $y(t)$, on cherche à retrouver l'amplitude a du signal $y(t)$.

1) Trouver une équation d'état d'ordre 2 capable de générer le signal $y(t)$. On prendra pour variables d'état $x_1 = \omega y$ et $x_2 = \dot{y}$.

2) Supposons qu'à un instant t, on connaisse le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$. En déduire une expression de l'amplitude a du signal $y(t)$ en fonction de $\mathbf{x}(t)$.

3) On mesure $y(t)$ uniquement. Proposer un observateur d'état (par une méthode de placement de pôle) qui nous génère une estimation $\hat{\mathbf{x}}(t)$ de l'état $\mathbf{x}(t)$. On placera tous les pôles en -1.

4) En déduire les équations d'état d'un estimateur d'entrée y et de sortie $\hat{a}$ qui nous donne une estimation $\hat{a}$ de l'amplitude a d'un signal sinusoïdal de pulsation ω.

Exercice .40. *Retour de sortie d'un système impropre*

On considère le système $\mathcal{S}$ d'entrée u et de sortie y décrit par l'équation différentielle suivante

$$\dot{y} - 2y = \dot{u} + 3u.$$

1) Ecrire ce système sous une représentation d'état.

2) Dessiner un câblage pour ce système (avec intégrateurs, additionneurs et amplificateurs).

3) Afin de rendre ce système strictement propre (c'est-à-dire, avec une matrice directe $\mathbf{D}$ nulle), on crée une nouvelle sortie $z = y - \alpha u$. Donner la valeur de α. On appellera $\mathcal{S}_z$ ce nouveau système dont l'entrée est u et la sortie z.

4) Trouver un régulateur par retour de sortie pour $\mathcal{S}_z$ qui fixe tous les pôles du système bouclé à -1. Vous donnerez ce régulateur sous la forme d'équation d'état.

5) En déduire un régulateur $\mathcal{S}_r$ (sous forme d'équation d'état) pour $\mathcal{S}$ qui fixe tous les pôles du système bouclé à -1. On notera $\mathcal{S}_b$ le système $\mathcal{S}$ bouclé par le régulateur $\mathcal{S}_r$

6) Donner les équations d'état du système bouclé $\mathcal{S}_b$.

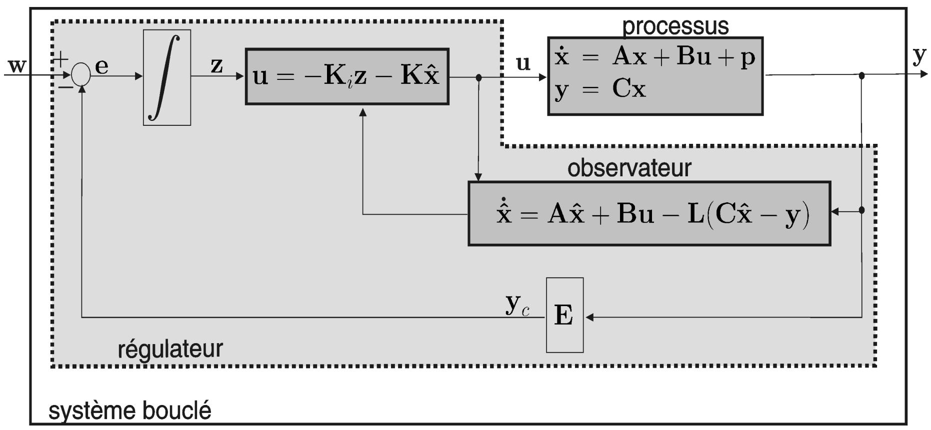
7) Calculer la fonction de transfert du système bouclé $\mathcal{S}_b$.

Exercice .41. *Retour de sortie avec effet intégral*

On considère le système décrit par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{p} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{cases}$$

où $\mathbf{p}$ est un vecteur de perturbation, censé représenter une perturbation extérieure qui n'a pu être prise en compte dans la modélisation (vent, pente du terrain, poids des personnes dans un ascenseur, ...). Le vecteur $\mathbf{p}$ est supposé inconnu et constant. Nous poserons $m = \dim \mathbf{u}$, $n = \dim \mathbf{x}$ et $p = \dim \mathbf{y}$. On se propose de réguler ce système par le régulateur par retour de sortie avec effet intégral représenté sur la figure ci-dessous.



Sur cette figure, $\mathbf{w}$ est la consigne et $\mathbf{y}_c$ est un vecteur de même dimension que $\mathbf{u}$ représentant les variables de sorties consignées (c'est-à-dire celles que l'on souhaite commander directement par l'intermédaire de $\mathbf{w}$ et ainsi avoir $\mathbf{y}_c = \mathbf{w}$, lorsque la consigne est constante). Le vecteur $\mathbf{y}_c$ satisfait la relation $\mathbf{y}_c = \mathbf{Ey}$, où $\mathbf{E}$ est une matrice connue.

1) Donner les équations d'état du système bouclé, sous forme matricielle. On rappelle que l'état $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}})$ du système bouclé sera constitué de l'état $\mathbf{x}$ du système à réguler, du vecteur $\mathbf{z}$ des quantités mémorisées dans les intégrateurs et de l'état $\hat{\mathbf{x}}$ reconstruit par l'observateur. Donner, en fonction de m, n, p, les dimensions des quantités $\mathbf{w}, \mathbf{y}_c, \mathbf{e}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}, \mathbf{L}$.

2) Posons $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Exprimer ces équations d'état, sous forme matricielle, en faisant prenant maintenant pour vecteur d'état $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon})$.

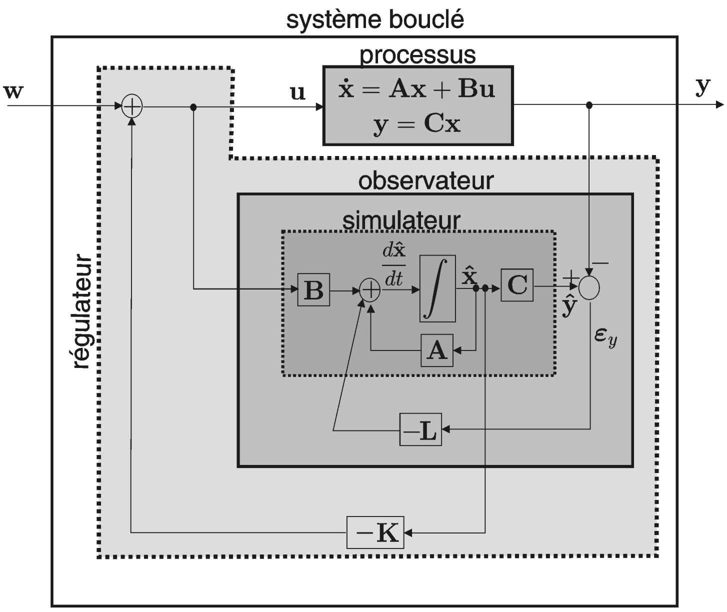
3) En utilisant la fonction `ppol` de SCILAB ou `place` de MATLAB, montrer comment on peut fixer arbitrairement tous les pôles du système bouclé.

4) Montrer que, pour une consigne $\mathbf{w}$ et une perturbation $\mathbf{p}$ constantes, en régime permanent, nous aurons nécessairement $\mathbf{y}_c = \mathbf{w}$.

5) Donner les équations d'état du régulateur, sous forme matricielle.

Exercice .42. *Principe de séparation*

On considère un système bouclé par une méthode de placement de pôles, comme représenté sur la figure ci-dessous.



1) Trouver les équations d'état du système bouclé. On prendra pour vecteur d'état le vecteur $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

2) Posons $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ et prenons comme nouveau vecteur d'état $(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\varepsilon}_x^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Donner la représentation d'état associée. Montrer que $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ n'est pas commandable.

3) Montrer que le polynôme caractéristique du système bouclé est donné par

$$P(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \, . \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) \, .$$

Que peut-on en déduire quant au lien entre les pôles de ce système et ceux que nous avons placés ?

---

5. Commande linéaire des systèmes non-linéaires

Exercice .43. *Linéarisation du système proies-prédateurs*

Considérons à nouveau le système proies-prédateurs de Lotka-Volterra, donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (1 - \alpha x_2)\, x_1 \\ \dot{x}_2 &= (-1 + \beta x_1)\, x_2. \end{cases}$$

1) Linéariser ce système autour d'un point d'équilibre intéressant.

2) Calculer les pôles du système linéarisé. Interpréter.

Exercice .44. *Linéarisation du char*

On considère le système de type char décrit par les équations d'état suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & u_1 \\ \dot{v} & = & u_2 \end{array}\right.$$

1) Linéariser ce système autour d'un état d'équilibre noté $\bar{\mathbf{x}} = \left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{v}\right)^{\mathrm{T}}$ qui n'est pas forcément un point d'équilibre.

2) Etudier le rang de la matrice de commandabilité en $\bar{\mathbf{x}}$ suivant les valeurs de $\bar{v}$.

3) Sachant les colonnes de la matrice de commandabilité représentent les directions suivant lesquelles on peut influencer le mouvement, calculer les directions non commandables.

Exercice .45. *Linéarisation de l'aéroglisseur*

On considère un aéroglisseur décrit par les équations d'état suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & v_x \\ \dot{y} & = & v_y \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{v}_x & = & u_1\cos\theta \\ \dot{v}_y & = & u_1\sin\theta \\ \dot{\omega} & = & u_2, \end{array}\right.$$

1) Linéariser autour d'un point $\bar{\mathbf{x}} = \left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{\omega}\right)$, qui n'est pas forcément un point d'équilibre.

2) Calculer la matrice de commandabilité autour $\bar{\mathbf{x}}$.

3) Donner les conditions pour lesquelles cette matrice n'est pas de rang plein.

4) Sachant les colonnes de la matrice de commandabilité représentent les directions suivant lesquelles on peut influencer le mouvement, calculer les directions de non-commandabilité. Interpréter.

Exercice .46. *Linéarisation du vérin simple effet*

On considère le vérin dont les équations d'état sont données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \frac{ax_3 - kx_1}{m} \\ \dot{x}_3 & = & -\frac{x_3}{x_1}\left(x_2 - \frac{u}{a}\right). \end{array}\right.$$

1) Nous supposerons que $x_1 > 0$. Calculer l'ensemble des points de fonctionnement $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ possibles.

2) Linéariser ce système. Interpréter.

Exercice .47. *Commande par placement de pôles d'un système non-linéaire*

Considérons le système non linéaire donné par les équations d'état

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} & = & 2x^2 + u \\ y & = & 3x, \end{cases}$$

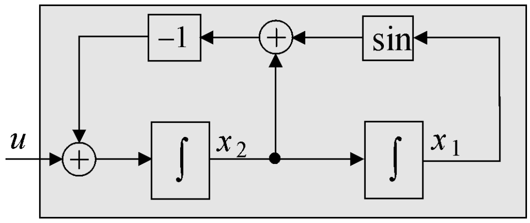
que l'on cherche à stabiliser autour de l'état $\bar{x} = 2$. A l'équilibre, nous voulons que y soit égal à sa consigne w. De plus, nous voulons que tous les pôles du système bouclé soient égaux à -1.

1) Donner les équations d'état du régulateur par placement de pôles qui satisfait ces contraintes.

2) Quelles sont les équations d'état du système bouclé.

Exercice .48. *Retour d'état d'un cablâge*

On considère le système représenté par câblage (de type SIMULINK) ci-dessous



1) Donner les équations d'état du système.

2) Calculer ses points d'équilibre.

3) Linéariser le système autour d'un point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ correspondant à $x_1 = \pi$. S'agit-il d'un point d'équilibre stable ?

4) Proposer un régulateur par retour d'état de la forme $u = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ qui stabilise le système autour de $\bar{\mathbf{x}}$. On placera les pôles en -1.

Exercice .49. *Asservissement du pendule inversé*

On considère le système décrit par les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m \sin x_2 (g \cos x_2 - \ell x_4^2) + u}{M + m \sin^2 x_2} \\ \frac{\sin x_2 ((M+m)g - m\ell x_4^2 \cos x_2) + \cos x_2 u}{\ell (M + m \sin^2 x_2)} \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

où l'entrée u est la force exercée sur le chariot, x_1 est la position du chariot, x_3 est l'angle que fait le pendule avec la verticale. Les paramètres sont la longueur ℓ du pendule, sa masse m et la masse M du chariot. L'équation de mesure nous indique que seule la position du chariot x_1 est mesurée.

1) Calculer tous les points de fonctionnement du système.

2) Linéariser le système autour du point de fonctionnement $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 0)$ et $\bar{u} = 0$.

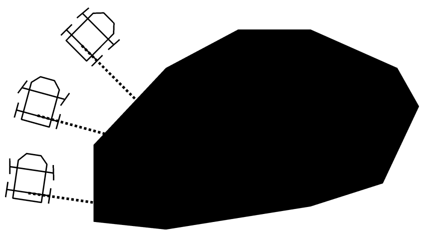
3) Donner les instructions MATLAB ou SCILAB qui nous permettent d'obtenir un régulateur par retour de sortie qui nous place tous les pôles du système bouclé en -2. On proposera une commande en position, ce qui signifie que la consigne correspond à x_1.

Exercice .50. *Asservissement d'une voiture le long d'un mur*

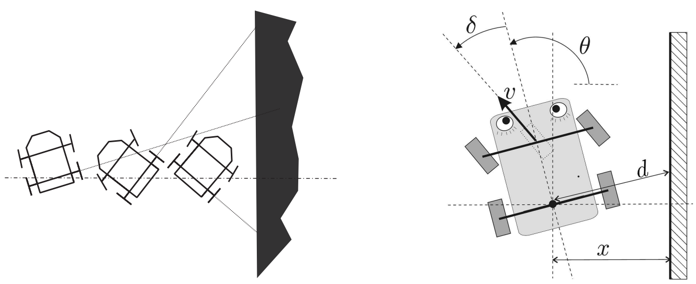
Ici, nous allons traiter le cas d'une voiture qui roule sur une route inconnue. La voiture est équipée

- d'un télémètre mesurant la distance latérale d entre le milieu de l'essieu arrière de la voiture et le bord de la route (voir figure),
- d'un capteur de vitesse qui mesure la vitesse v des roues avant,
- et d'un capteur d'angle qui mesure l'angle δ du volant (pour simplifier, nous allons supposer que δ correspond aussi à l'angle entre les roues avant et l'axe de la voiture).

Pour nos simulations, nous allons supposer que notre voiture roule autour d'un polygone.



On souhaite que la voiture se déplace à vitesse constante le long de la route. Bien sûr, il est hors de question de mettre dans la connaissance du régulateur la forme de la route car elle est inconnue. De plus, les variables de position et d'orientation de la voiture ne sont pas mesurées (c'est-à-dire qu'on ne dispose ni de boussole, ni de GPS). Or ces quantités sont souvent inutiles pour atteindre l'objectif fixé, à savoir suivre la route. En effet, ne sommes-nous pas, nous-mêmes, capables de conduire une voiture sur une route sans avoir la carte des environs, sans savoir où nous sommes et où est le nord ? Ce qui nous intéresse lorsque nous conduisons une voiture, c'est la position relative de la voiture par rapport à la route. Le monde vu par le régulateur est évoqué par la figure suivante. Dans ce monde, la voiture se déplace latéralement, comme sur un jeu vidéo, et le bord de la route reste fixe.



Ce monde doit être tel que le modèle utilisé par le régulateur possède des variables d'état décrivant cette position relative de la voiture par rapport à la route et que la constance des variables d'état de ce modèle corresponde à une situation réelle où la voiture suit la route à une vitesse constante. Nous avons besoin d'imaginer un monde idéal pour le régulateur où le modèle associé admet un point de fonctionnement qui correspond au comportement voulu pour notre système réel.

Nous allons pour cela supposer que notre voiture roule à une distance $\bar{x}$ du bord. Ce modèle doit posséder les mêmes entrées $\mathbf{u}$ et sorties $\mathbf{y}$ que le système réel, à savoir deux entrées (l'accélération des roues avant $\dot{v}$ et la vitesse angulaire du volant $\dot{\delta}$) et trois sorties (la distance d du milieu de l'essieu arrière au bord de la route, la vitesse v des roues avant et l'angle δ du volant). Du fait que seule la position relative de la voiture nous intéresse, notre modèle ne doit posséder que quatre variables d'états : x, θ, v, δ, comme représenté sur la figure. Attention, la signification de la variable x a changé par rapport à la modélisation faite en cours.

1) Trouver les équations d'état (c'est-à-dire l'équation d'évolution et l'équation d'observation) du système imaginé par le régulateur.

2) Choisissons pour point de fonctionnement

$$\bar{\mathbf{x}} = (5, \pi/2, 7, 0) \text{ et } \bar{\mathbf{u}} = (0, 0)$$

qui correspond à une vitesse de 7 ms^{-1} et une distance de 5 m entre le milieu de l'essieu arrière et le bord de la route. Linéariser le système autour de son point de fonctionnement.

3) Prenons pour variables consignées x et v, ce qui signifie que nous voulons que nos consignes w_1 et w_2 correspondent à la distance au bord de la route et la vitesse de la voiture. Donner les instructions Matlab ou ilab qui nous permettent de générer notre régulateur. Tous les pôles seront placés en -2.

Exercice .51. *Commande d'un système non-linéaire*

Première partie. (Commande proportionnelle et dérivée). On considère un système du second ordre décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y} = u,$$

où u est l'entrée et y la sortie.

1) Donner une représentation d'état pour ce système. Le vecteur d'état choisi est donné par $\mathbf{x} = (y, \dot{y})$.

2) On se propose de commander ce système par une commande proportionnelle et dérivée du type

$$u = k_1(w - y) + k_2(\dot{w} - \dot{y}) + \ddot{w},$$

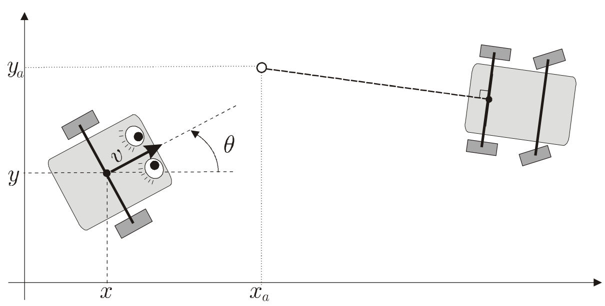
où w est une fonction connue (par exemple un polynôme) appelée *consigne* et qui ici peut dépendre du temps t. Notons que ici, nous avons supposé que y et $\dot{y}$ étaient disponibles pour le régulateur. Donner l'équation différentielle satisfaite par l'erreur $e = w - y$ entre la consigne et la sortie y.

3) Calculer k_1 et k_2 qui permettent d'avoir une erreur e qui converge vers 0 de facon exponentielle, avec des pôles tous égaux à -1.

Deuxième partie (Régulation d'un véhicule de type char autour d'une trajectoire). On considère un véhicule robotisé (à gauche sur la figure ci-dessous) décrit par les équations d'état suivantes (modèle char)

$$\begin{cases} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= u_1 \\ \dot{v} &= u_2, \end{cases}$$

où v est la vitesse du robot, θ son orientation et (x, y) les coordonnées de son centre. Nous supposons que nous sommes capables de mesurer avec une très grande précision toutes les variables d'état de notre robot.



Notre robot (avec des yeux) suit un véhicule (ici une voiture) qui possède un point d'accroche (petit cercle blanc) auquel le robot doit se raccrocher.

1) Notons $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v)$ le vecteur d'état de notre robot et $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ le vecteur des entrées. Calculer $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ en fonction de $\mathbf{x}$ de $\mathbf{u}$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}).\mathbf{u}.$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice 2×2 dont on donnera l'expression.

2) Un autre véhicule mobile (à droite sur la figure) nous informe, par voie hertzienne, des coordonnées précises (x_a, y_a) d'un point d'accroche virtuel (c'est-à-dire qui n'existe que par la pensée), fixe par rapport à ce véhicule, auquel nous devons nous positionner. C'est-à-dire que nous voulons que le centre du robot (x, y) soit tel que $x(t) = x_a(t)$ et $y(t) = y_a(t)$. Ce véhicule nous envoie aussi les deux premières dérivées $(\dot{x}_a, \dot{y}_a, \ddot{x}_a, \ddot{y}_a)$ des coordonnées de son point d'accroche. Proposer l'expression d'une commande $\mathbf{u}(\mathbf{x}, x_a, y_a, \dot{x}_a, \dot{y}_a, \ddot{x}_a, \ddot{y}_a)$ qui nous assure que le distance entre la position (x, y) de notre robot et celle du point d'accroche (x_a, y_a) décroït de façon exponentielle. On placera les pôles en -1.

Conseils. Vous devez procéder à un premier bouclage de la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{q},$$

où $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ est notre nouvelle entrée. Ce premier bouclage vous permet de simplifier votre système en le rendant linéaire. Ensuite, vous pouvez procéder à un deuxième bouclage du type proportionnelle et dérivée.
