

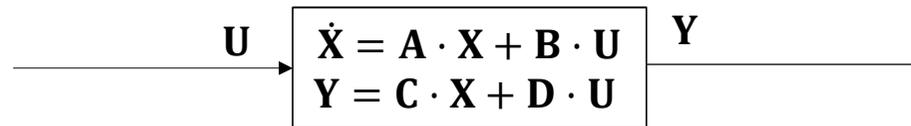
GUIDAGE

2024-2025

Lionel Lapierre, Loick Degorre, Luc Jaulin

Rappel sur le linéaire

- Modèles :



$\underbrace{\mathbf{X}}_{(n,1)}$: l'état du système

$\underbrace{\mathbf{U}}_{(m,1)}$: l'entrée du système

$\underbrace{\mathbf{Y}}_{(l,1)}$: la sortie du système

$\underbrace{\mathbf{A}}_{(n,n)}$: Matrice de dynamique

$\underbrace{\mathbf{B}}_{(n,m)}$: Matrice des entrées

$\underbrace{\mathbf{C}}_{(l,n)}$: Matrice des sorties

$\underbrace{\mathbf{D}}_{(l,m)}$: Matrice entrées/sorties

- Stabilité :

Valeurs propres de \mathbf{A} : $\lambda_i / \det(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_d) = 0$. Si $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \rightarrow$ STABLE, INSTABLE sinon

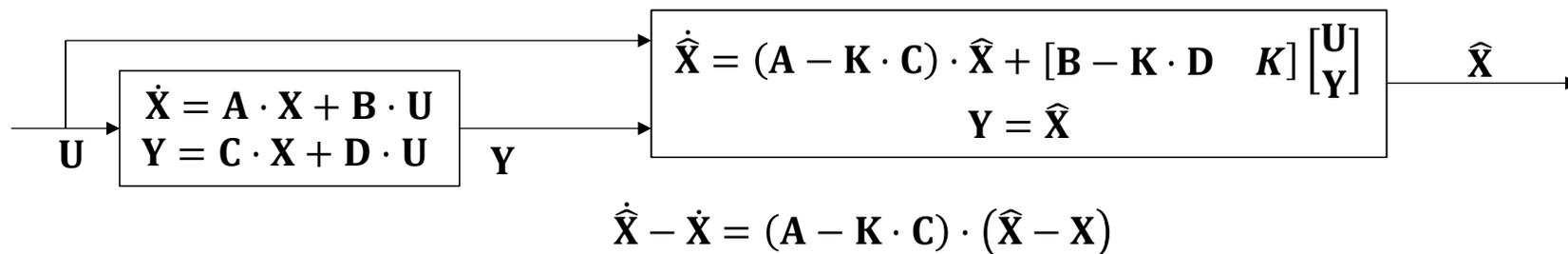
Rappel sur le linéaire

- Observateur de Kalman :

- Critère d'observabilité :

Soit $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1}]^T$ la matrice d'observabilité. Si $\text{rank}(\mathbf{Q}_0) = n$, (rang plein), alors le système est complètement observable.

- Observateur



- Calcul du gain \mathbf{K} de l'observateur

- Choix des pôles de l'observateur : $p_i < -\alpha_i * \max(|\lambda_j|)$, $\forall i = 1:n, \forall j = 1:n$, $\alpha_i \in [2,10]$
- Calcul du gain \mathbf{K} ? , $\det(\mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{C} - p_i \cdot \mathbf{Id}) = 0$

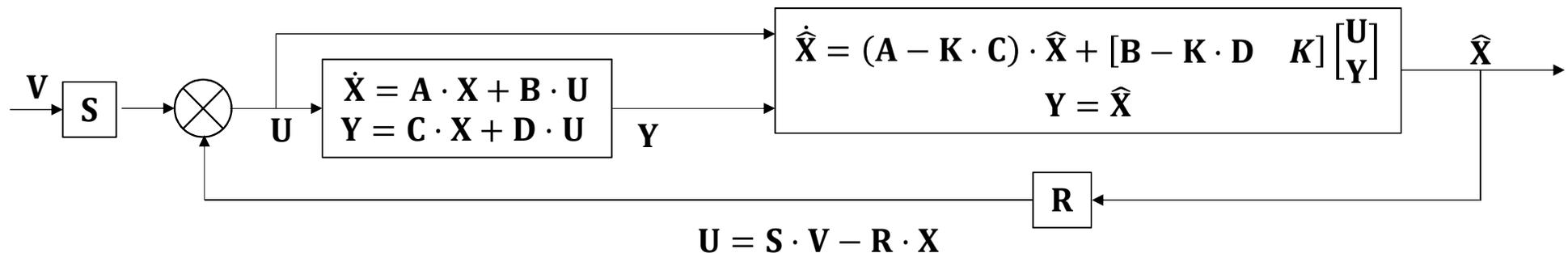
Rappel sur le linéaire

- Contrôle par retour d'état et placement de pôles :

- Critère de commandabilité :

Soit $\mathbf{Q}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B}]^T$ la matrice de commandabilité. Si $\text{rank}(\mathbf{Q}_C) = n$, (rang plein), alors le système est complètement commandable, et un placement de pôle intégral est possible.

- Placement de pôles



- Calcul du gain \mathbf{R} de l'observateur

- Choix des pôles de du système en BF : $\text{Re}(p_i) < 0, \forall i = 1:n$. $\mathbf{R}?$, $\det(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} - p_i \cdot \mathbf{I}_d) = 0$
- Calcul du préfiltre \mathbf{S} : $\mathbf{S}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s)$, $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{C} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}) \cdot [s \cdot \mathbf{I}_d - (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{R})]^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}$

Rappel sur le linéaire

- Si $\text{rank}(\mathbf{Q}_C) < n$ ou $\text{rank}(\mathbf{Q}_0) < n$
 - Critère de Shen et Desoer : passer par la **jordanisation** pour découpler les sous-systèmes et leur appliquer les critères précédents.
 - Identifier les n valeurs propres λ_i de \mathbf{A} , ainsi que leur ordre de multiplicité m_i
 - Si les n valeurs propres sont distinctes ($m_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$), le système est **diagonalisable**
 - Identifier les n vecteurs propres \mathbf{V}_i , tels que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{V}_i$
 - La matrice de passage \mathbf{T} s'écrit alors $\mathbf{T} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n]$
 - Le changement de variable $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}$, implique une nouvelle expression du système:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{X}=\mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}} \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} \text{ où } \mathbf{J} = \text{diag}(\lambda_i)$$

- Si $l < n$ valeurs propres γ_k sont d'ordre de multiplicité supérieur à 1, $m_k > 1, \forall k = 1, \dots, l$
- ...

Rappel sur le linéaire

- Si $\text{rank}(\mathbf{Q}_C) < n$ ou $\text{rank}(\mathbf{Q}_0) < n$
 - Critère de Shen et Desoer : passer par la **jordanisation** pour découpler les sous-systèmes et leur appliquer les critères précédents.
 - Identifier les n valeurs propres λ_i de \mathbf{A} , ainsi que leur ordre de multiplicité m_i
 - Si les n valeurs propres sont distinctes ($m_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$), le système est **diagonalisable**
 - ...
 - Si $l < n$ valeurs propres γ_k sont d'ordre de multiplicité supérieur à 1, $m_k > 1, \forall k = 1, \dots, l$
 - On recherche le nombre de blocs de Jordan associés aux valeurs propres γ_k :

$$n_{\lambda_k} = n - \text{rank}(\mathbf{A} - \gamma_k \cdot \mathbf{Id})$$

- On identifie alors n_{λ_k} vecteurs propres et $m_k - n_{\lambda_k}$ vecteurs quasi-propres.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_i = \gamma_i \cdot \mathbf{V}_i$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_{i+1} = \gamma_i \cdot \mathbf{V}_{i+1} + \alpha \cdot \mathbf{V}_i,$$

où $\alpha = 0$ si \mathbf{V}_{i+1} est vecteur propre, $\alpha = 1$ si \mathbf{V}_{i+1} est vecteur quasi-propre

- $\mathbf{T} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n]$, le changement de variable $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}$, implique

$$J = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 & 1 \\ 0 & \gamma_1 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{matrix} & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_n & \end{bmatrix}$$

Annotations: $m_{\gamma_1}=2, n_{\gamma_1}=1$ (pointing to the first block); $m_{\gamma_2}=3, n_{\gamma_2}=2$ (pointing to the second block); $m_{\lambda_i}=1$ (pointing to the diagonal elements).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{X}=\mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}} \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{cases} \text{ où } \mathbf{J} = \text{Jordan}$$

Rappel sur le linéaire

- Exercice : le satellite, par R. Sepulchre et E. Bullinger de l'Univ. de Liège
 - On considère les équations linéarisées d'un satellite au voisinage d'une orbite circulaire parcourue à vitesse constante ω

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= 3 \cdot \omega^2 \cdot r + 2 \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + u_r \\ \ddot{\theta} &= -2 \cdot \omega \cdot \dot{r} + u_\theta\end{aligned}$$

Le satellite est commandé par deux moteurs. Le premier fournit une force radiale u_r et le second une force tangentielle u_θ .

1. Suite à un problème technique, vous devez couper un moteur. Lequel choisiriez-vous ?
2. Déterminer si ce système est observable lorsque la sortie mesurée est la position radiale. Sinon, quelle sortie utiliser ?

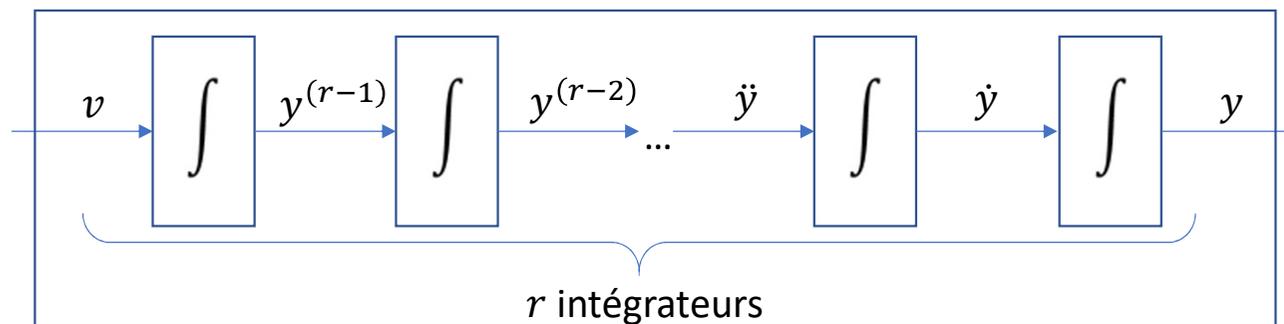
Rappel sur le linéaire

- Cas de la chaîne d'intégrateurs

- Les simplifications du modèle du système peuvent conduire à une relation entrée – sortie sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs :

$$y^{(r)} = v$$

$$\Leftrightarrow \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \text{ avec : } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-2)} \\ y^{(r-1)} \end{bmatrix}$$



Rappel sur le linéaire

- Cas de la chaîne d'intégrateurs

- Les simplifications du modèle du système peuvent conduire à une relation entrée – sortie sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs :

$$y^{(r)} = v$$

- Commande d'une chaîne d'intégrateur : PD étendu

- On veut amener ce système à suivre une référence définie par : $y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d^{(r)}(t)$
- On choisit : $v = \alpha_0 \cdot (y_d - y) + \alpha_1 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + \dots + \alpha_{r-1} \cdot (y_d^{(r-1)} - y^{(r-1)}) + y_d^{(r)}$, ce qui implique la dynamique suivante en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot e + \alpha_1 \cdot \dot{e} + \dots + \alpha_{r-1} \cdot e^{(r-1)} + e^{(r)} &= 0 \\ \Rightarrow e^{(r)} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \cdot e^{(k)} &\stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} P(s) = s^r + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \cdot s^k \end{aligned}$$

- Le choix des coefficients α_i se fait par placement de pôles. On choisit r pôles $p_i, i = 1, \dots, r$
- $$e^{(r)} + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \cdot e^{(k)} \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} P(s) = s^r + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \cdot s^k. \quad \alpha_i? P(s), t. q. P(s) = \prod_{k=1}^r (s - p_k)$$

Rappel sur le linéaire

- Cas de la chaîne d'intégrateurs

- Les simplifications du modèle du système peuvent conduire à une relation entrée – sortie sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs :

$$y^{(r)} = v$$

- Commande d'une chaîne d'intégrateur : PD étendu

- Exemple : de manière générique on peut considérer que les pôles désirés sont tous égaux à :

$$p_i = -1, \forall i \Rightarrow \alpha_i? \text{ t. q. : } s^r + \alpha_{r-1} \cdot s^{r-1} + \dots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0 = (s + 1)^r$$

Ce cas particulier ($p_i = -1, \forall i$) implique que les coefficients α_i soient ceux du triangle de Pascal

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	
$r = 0$	1					$u = y_d$
$r = 1$	1	1				$u = \dot{y}_d + 1 \cdot (y_d - y)$
$r = 2$	1	2	1			$u = \ddot{y}_d + 2 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + 1 \cdot (y_d - y)$
$r = 3$	1	3	3	1		$u = \dddot{y}_d + 3 \cdot (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + 3 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + 1 \cdot (y_d - y)$
$r = 4$	1	4	6	4	1	$u = \ddddot{y}_d + 4 \cdot (\dddot{y}_d - \dddot{y}) + 6 \cdot (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + 4 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + 1 \cdot (y_d - y)$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Approximation linéaire du modèle**

- Soit le système suivant :

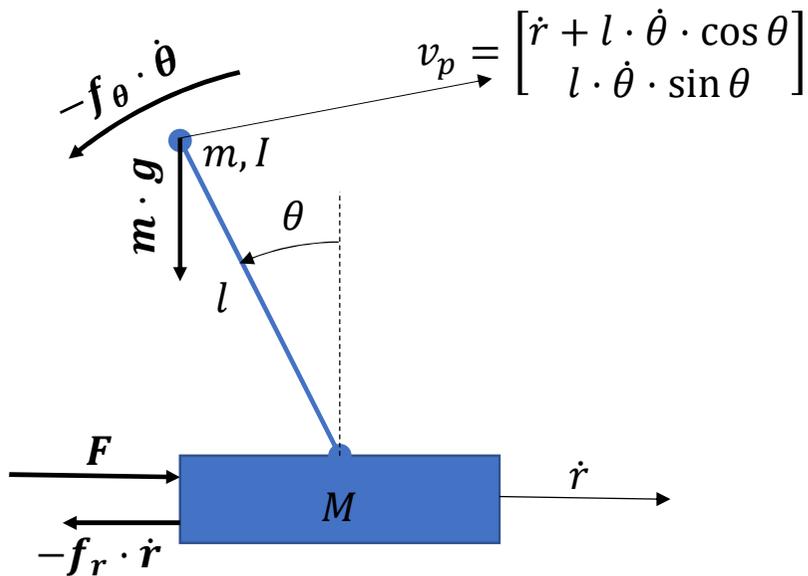
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

- Linéarisation :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- Exemple du pendule inversé : modélisation



Energie cinétique totale :

$$T = \frac{1}{2} \cdot (M \cdot \dot{r}^2 + m \cdot v_p^2 + I \cdot \dot{\theta}^2)$$

Energie potentielle :

$$P = m \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta$$

Formalisme de Lagrange

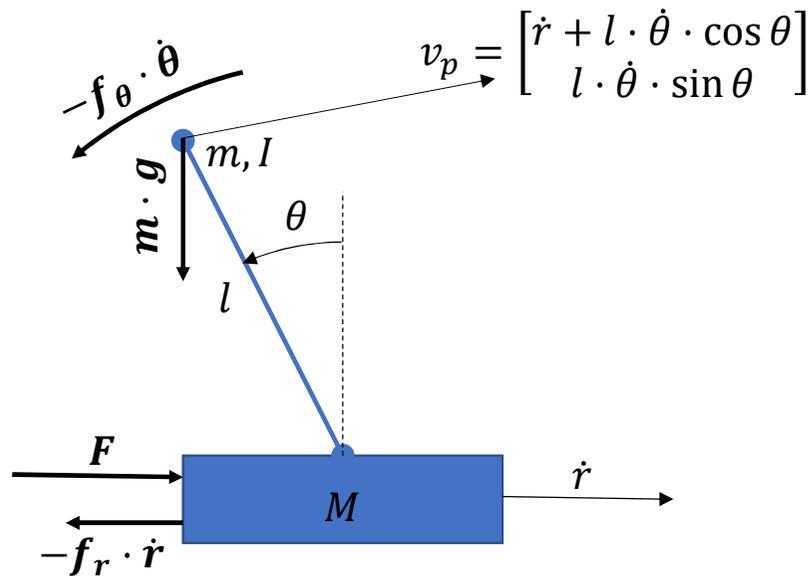
$$L = T - P \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = F \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Modèle nonlinéaire :

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{r} + f_r \cdot \dot{r} + m \cdot l \cdot [\ddot{\theta} \cdot \cos \theta - \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta] = F \\ (I + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\theta} + f_\theta \cdot \dot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{r} \cdot \cos \theta - m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- Exemple du pendule inversé : linéarisation



Choix du vecteur d'état : $X = [r \quad \theta \quad \dot{r} \quad \dot{\theta}]^T$. On pose : $r = \bar{r} + \delta_r$, $\theta = \bar{\theta} + \delta_\theta$ et $F = \bar{F} + \delta_F$, autour du point de fonctionnement $\bar{X} = [r_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. Ainsi le modèle linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{\delta}_r + f_r \cdot \dot{\delta}_r + m \cdot l \cdot \ddot{\delta}_\theta = \delta_F \\ (I + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\delta}_\theta + f_\theta \cdot \dot{\delta}_\theta + m \cdot l \cdot \ddot{\delta}_r - m \cdot g \cdot l \cdot \delta_\theta = 0 \end{cases}$$

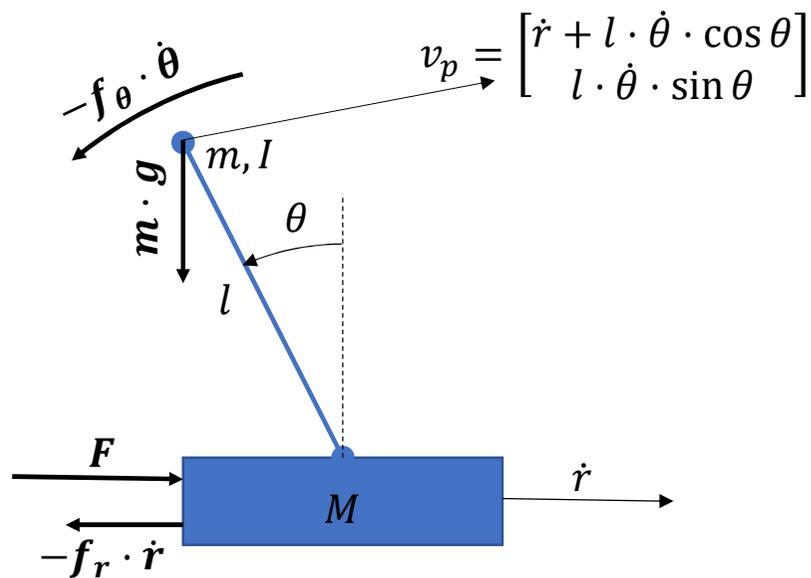
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\delta}_r \\ \dot{\delta}_\theta \\ \ddot{\delta}_r \\ \ddot{\delta}_\theta \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ [M+m & m \cdot l]^{-1} \cdot [0 & 0 & -f_r & 0] \\ [m \cdot l & I+m \cdot l^2]^{-1} \cdot [0 & m \cdot g \cdot l & 0 & -f_\theta] \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_\theta \\ \dot{\delta}_r \\ \dot{\delta}_\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ [M+m & m \cdot l]^{-1} \\ [m \cdot l & I+m \cdot l^2]^{-1} \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \cdot \delta_F$$

Les mesures sont $\mathbf{y} = [\delta_r \quad \delta_\theta \quad \dot{\delta}_r]^T$, ainsi, on peut écrire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}, \text{ où } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- Exemple du pendule inversé : considération des frottements secs



Il existe une perturbation importante dans le système induisant un comportement nonlinéaire : les frottements secs f_s . Difficiles à estimer on peut cependant les **observer** si on les inclut dans le vecteur d'état (on pose $\dot{f}_s = 0$).

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{\delta}_r + f_r \cdot \dot{\delta}_r + m \cdot l \cdot \ddot{\delta}_\theta = \delta_F - f_s \\ (I + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\delta}_\theta + f_\theta \cdot \dot{\delta}_\theta + m \cdot l \cdot \ddot{\delta}_r - m \cdot g \cdot l \cdot \delta_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_r \\ \dot{\delta}_\theta \\ \ddot{\delta}_r \\ \ddot{\delta}_\theta \\ \dot{f}_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ [M+m & m \cdot l]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_r & 0 \\ 0 & m \cdot g \cdot l & 0 & -f_\theta \end{bmatrix} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_\theta \\ \dot{\delta}_r \\ \dot{\delta}_\theta \\ f_s \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ [M+m & m \cdot l]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [m \cdot l & I + m \cdot l^2]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{u}} \cdot F$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \cdot \tilde{x}$$

-> Observabilité -> Observateur -> commande par retour d'état et placement de pôles...

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Système**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Champ de vecteurs**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

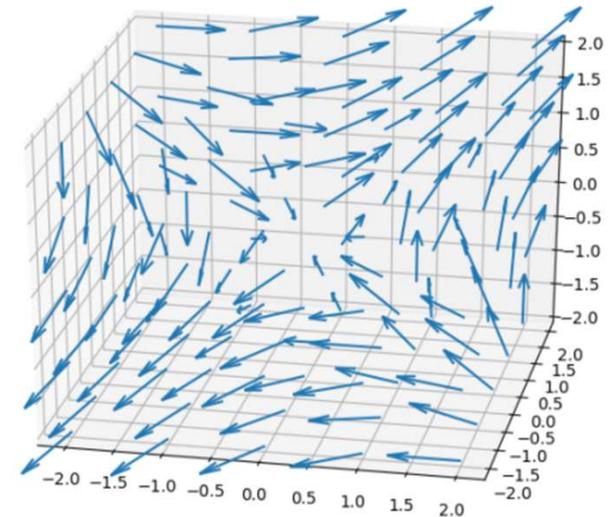
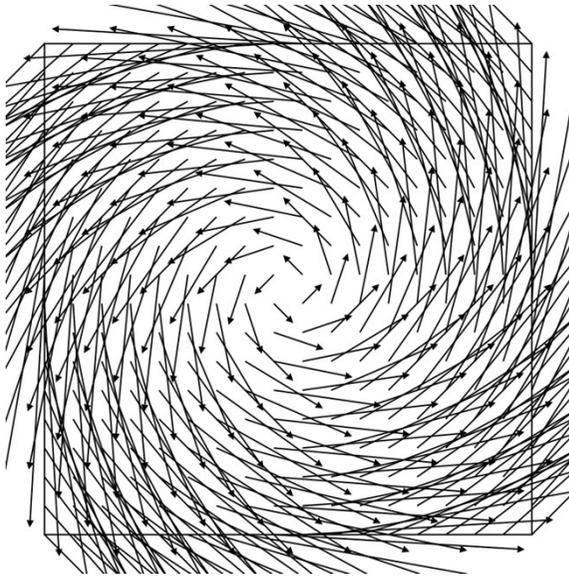
Opérateur différentiel -> champ de vecteur

Champ de vecteurs

[Article](#) [Discussion](#)

[Lire](#) [Modifier](#) [Modi](#)

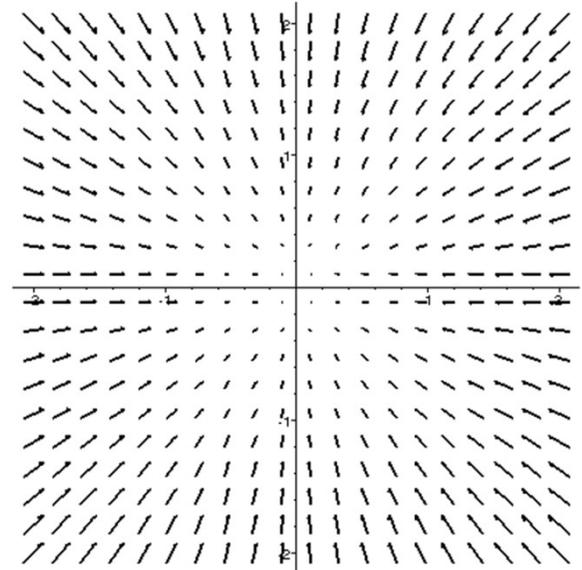
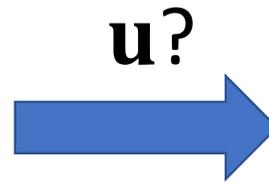
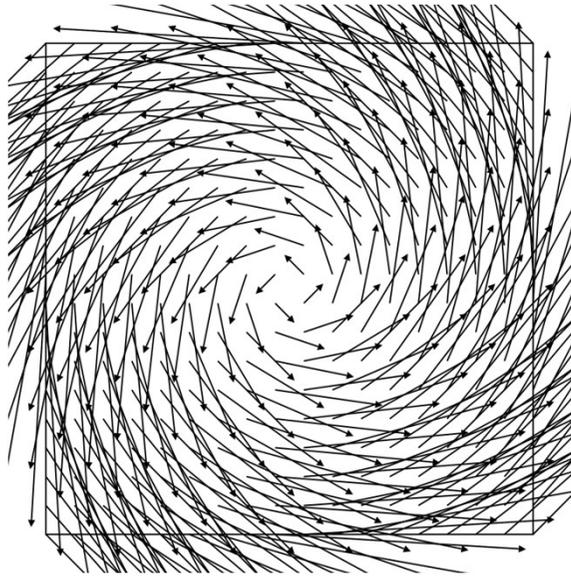
En [mathématiques](#), un **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** est une [fonction](#) qui associe un [vecteur](#) à chaque point d'un [espace euclidien](#) ou plus généralement d'une [variété différentielle](#)¹. Pour la résolution des [équations différentielles autonomes](#) du 1^{er} ordre, on utilise le champ des directions (appelé en physique champ des vitesses) qui représente les dérivées tangentes à la trajectoire-solution de ces équations, ce qui permet de la tracer.



Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Champ de vecteurs, commande**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

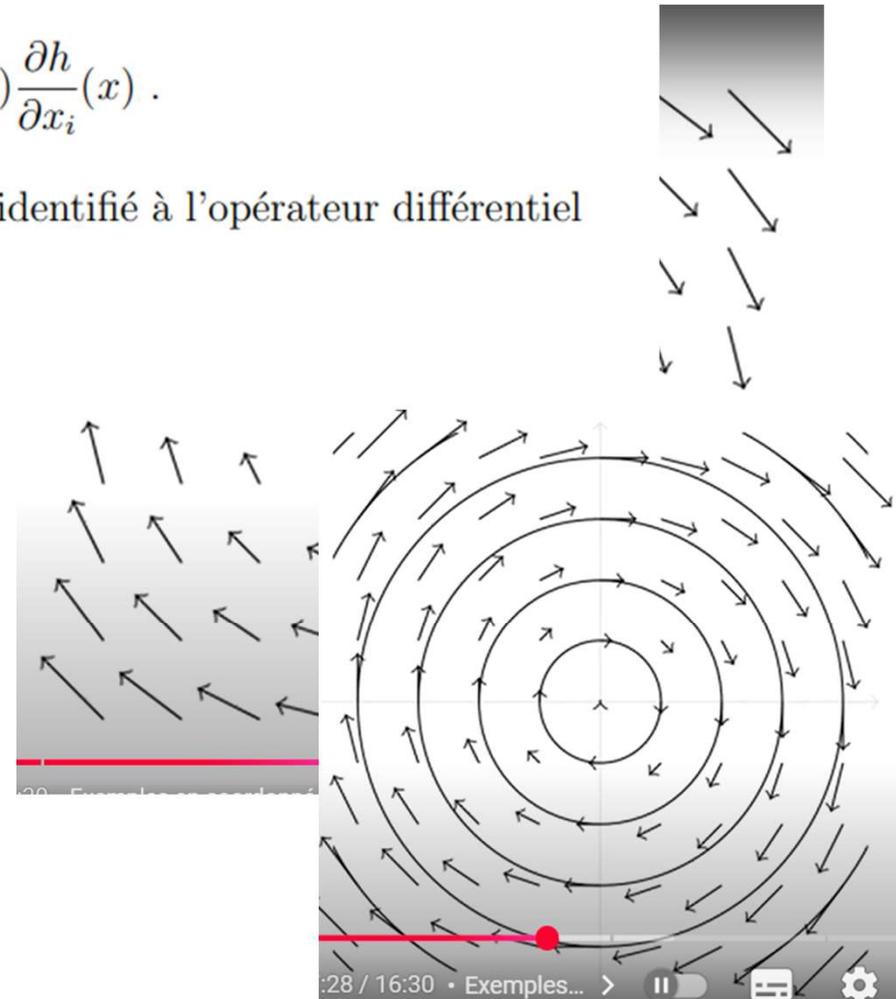
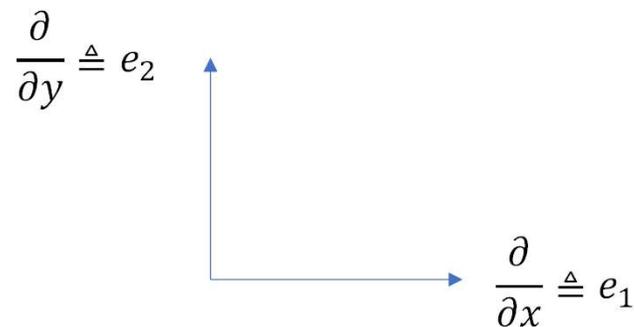


Définition 6 Soit h une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On appelle dérivée de Lie de h dans la direction f , notée $L_f h$, la dérivée de h le long de la courbe intégrale de f en $t = 0$, autrement dit :

$$L_f h(x) = \frac{d}{dt} h(X_t(x))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) .$$

Par cette formule, un champ de vecteurs f quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$



Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- Soit le système (affine en entrée) suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

- Remarque :



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{z} = v \end{cases} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(X) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{X})} \cdot v = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{G}(\mathbf{X}) \cdot v$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – Etat**

- Soit le système (affine en entrée) suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

- Linéarisation : existe-t-il :

- Un changement de variable (difféomorphisme) : $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$,
- et une commande (bouclage sur l'état) : $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v},$$

avec (\mathbf{A}, \mathbf{B}) commandable.

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – Etat**

- Soit le système (affine en entrée) suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

- Si $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$ existe, la solution

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

- Sinon vérifier qu'un changement de variable peut annuler les éléments nonlinéaires

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 7 \cdot x_2 \\ -x_2 + \cos x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \xrightarrow{u = -\cos(x_1) + v} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v$$

Pendule : $\ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} + a \cdot \sin \theta = c \cdot T \xrightarrow{T = \frac{a \cdot \sin(\theta) + v}{c}} \ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} = v$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie, principe**

- Soit le système (affine en entrée) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dim(\mathbf{x}) = n, \\ \dim(\mathbf{u}) = m \\ \dim(\mathbf{y}) = l = m \end{array}$$

- Principe : on dérive les éléments de la sortie jusqu'à ce qu'une entrée apparaisse :

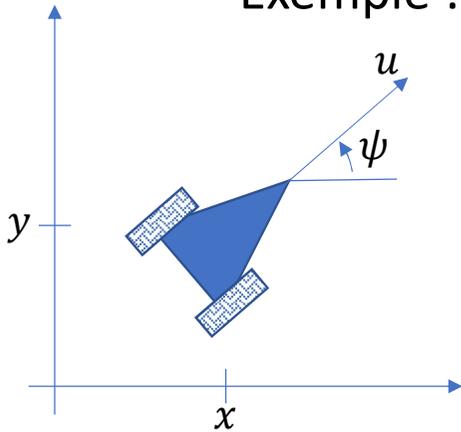
$$\dot{y}_i = \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

- Si $\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, on continue de dériver, $\ddot{y}_i = \dots$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie**

- Exemple : la voiture de Dubins



$$\begin{cases} \dot{x} = u \cdot \cos \psi \\ \dot{y} = u \cdot \sin \psi \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{u} = F \end{cases}$$

Le vecteur d'état : $\mathbf{x} = [x \ y \ \psi \ v]^T$, les entrées : $\mathbf{u} = [r \ F]^T$, les mesures : $\mathbf{y} = [x \ y \ \psi]^T$. On cherche à réguler (x, y) vers $(x_d(t), y_d(t))$. La linéarisation Entrée – Sortie conduit à dériver la sortie jusqu'à ce que les entrées apparaissent :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \cos \psi \\ u \cdot \sin \psi \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u \cdot \sin \psi & \cos \psi \\ u \cdot \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ F \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}$$

Ainsi, si $u \neq 0$, on peut faire le changement de variable suivant :

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

qui engendre la linéarité du modèle entrée – sortie :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie**

- Soit le système (affine en entrée) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dim(\mathbf{x}) = n, \\ \dim(\mathbf{u}) = m \\ \dim(\mathbf{y}) = l = m \end{array}$$

- Principe : on dérive la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse :

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & g_{12}(\mathbf{x}) & \dots & g_{1m}(\mathbf{x}) \\ g_{21}(\mathbf{x}) & g_{22}(\mathbf{x}) & \dots & g_{2m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(\mathbf{x}) & g_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & g_{nm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot g_{11}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \cdot g_{n1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot g_{1m}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \cdot g_{nm}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot g_{11}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_n} \cdot g_{n1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot g_{1m}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial h_l(\mathbf{x})}{\partial x_n} \cdot g_{nm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

• Outils géométriques, algèbre de Lie

- Soit le système (affine en entrée) suivant :
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dim(\mathbf{x}) = n, \\ \dim(\mathbf{u}) = m \\ \dim(\mathbf{y}) = l = m \end{array}$$

- Principe de la LEE-S : on dérive la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse :

- Première dérivée :
$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} = \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot g(x)}_{L_g h(x)} \cdot u = L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u$$

- Si $L_g h(x) = 0$ (\dot{y} est indépendant de u) -> deuxième dérivée :

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot (f(x) + g(x) \cdot u) = L_f L_f h(x) + L_g L_f h(x) \cdot u$$

- Si $L_g L_f h(x) = 0$, (\ddot{y} est indépendant de u) -> Troisième dérivée : ..

⋮

- Si $L_g L_f^{l-2} h(x) = 0$,
$$y^{(l)} = L_f^l h(x) + L_g L_f^{l-1} h(x) \cdot u$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie**

- Soit le système (affine en entrée) suivant :
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases}$$
 $\dim(x) = n,$
 $\dim(u) = m$
 $\dim(y) = l$
- Principe de la LEE-S : on dérive la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse :

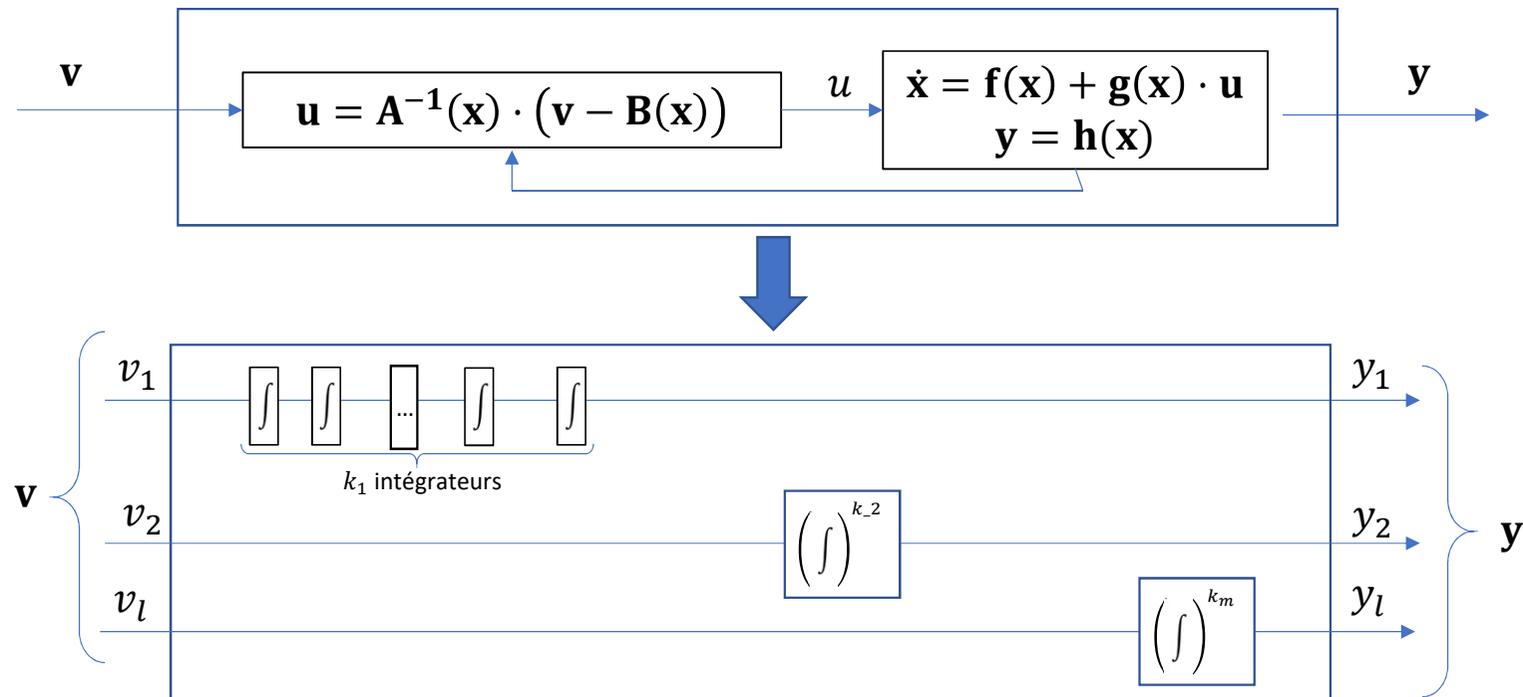
$$\begin{bmatrix} y_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ y_l^{(k_l)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{k_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{k_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{k_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{k_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}}_{A(x)} \cdot u + \underbrace{\begin{bmatrix} L_f^{k_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{k_m} h_m(x) \end{bmatrix}}_{B(x)} = A(x) \cdot u + B(x)$$

- Ainsi, si **A(x) est inversible**, le contrôle :

$$u = A^{-1}(x) \cdot (v - B(x)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases} \equiv \begin{cases} y_1^{(k_1)} = v_1 \\ \vdots \\ y_l^{(k_m)} = v_m \end{cases}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

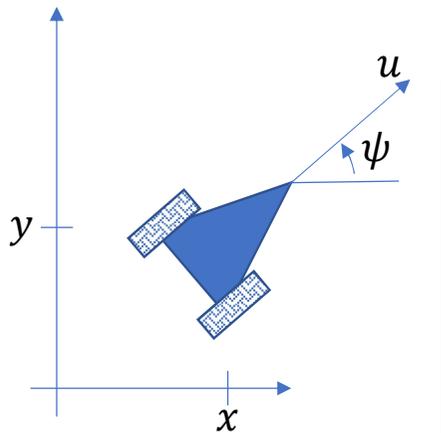
- Linéarisation exacte Entrée – sortie



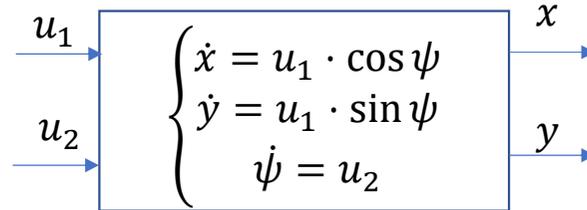
Les k_i sont appelés *délais différentiels*.

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie**
 - **Exemple : l'Unicycle ou robot de type Char**



$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cdot \cos \psi \\ \dot{y} = u_1 \cdot \sin \psi \\ \dot{\psi} = u_2 \end{cases}$$



Degrés relatifs

	x	y
u ₁	1	1
u ₂	2	2

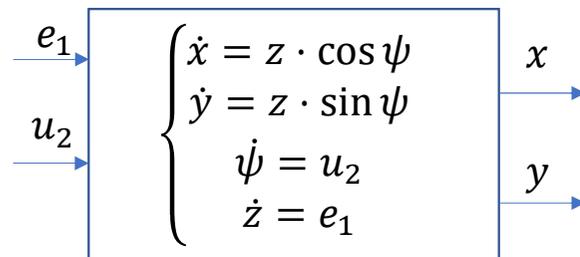
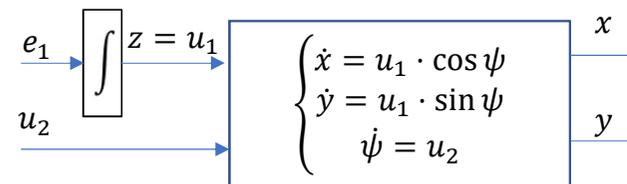
(le nombre de fois qu'il faut dériver les sorties pour faire apparaître les entrées)

$$u = A^{-1}(x) \cdot (v - B(x))$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & 0 \\ \sin \psi & 0 \end{bmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(x)}$$

$\det(A(x)) = 0!$

On ajoute un intégrateur devant l'entrée u₁



	x	y
v ₁	2	2
u ₂	2	2

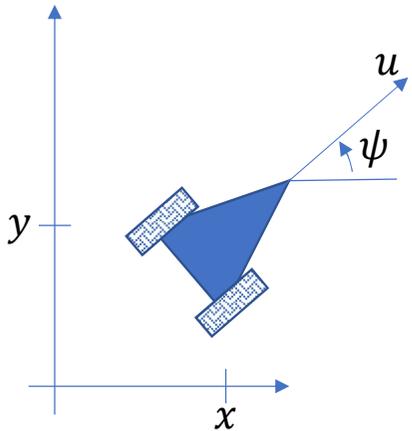
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & -z \cdot \sin \theta \\ \sin \psi & z \cdot \cos \theta \end{bmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(x)}$$

Approches linéaires des systèmes nonlinéaires

- **Linéarisation exacte Entrée – sortie**

- Exemple : l'Unicycle ou robot de type Char

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & -z \cdot \sin \theta \\ \sin \psi & z \cdot \cos \theta \end{bmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{bmatrix} v \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(x)}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cdot \cos \psi \\ \dot{y} = u_1 \cdot \sin \psi \\ \dot{\psi} = u_2 \end{cases}$$

