GUIDAGE
Commande robuste par mode glissant

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

- Structure de la commande :

$$F = F_0 + F_D$$

F_0 : commande ‘nominale du système non perturbé ($d = 0$)

F_D : commande discontinue produisant la robustesse

- Objectif : $q(t) \rightarrow q_d(t) : q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)$

$$F_0 = M \cdot \big(\ddot{q}_d + (1 + k_2) \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)\big) + C(q) \cdot \dot{q}$$

$$\Rightarrow \text{si } d = 0, \qquad (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + (1 + k_2) \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q) = 0$$

$$\Rightarrow si\ e = q_d - q, \qquad \ddot{e} + (1 + k_2) \cdot \dot{e} + k_2 \cdot \dot{e} = 0$$

(méthode du couple calculé, *computed torque*)

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

- Structure de la commande :

$$F = F_0 + F_D$$

$$F_0 = M \cdot \big(\ddot{q}_d + (1 + k_2) \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)\big) + C(q) \cdot \dot{q}$$

- Définition de la surface de glissement :

$$s = (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)$$

$$\Rightarrow F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q}$$

- Commande discontinue :

$$F_D = K_D \cdot \mathrm{sign}(s)$$

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

- Structure de la commande :

$$F = F_0 + F_D$$

$$F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q} \text{ , } F_D = K_D \cdot \mathrm{sign}(s)$$

où $s = (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)$ &

$$\Rightarrow M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F \Rightarrow (\ddot{q}_d - \ddot{q}) = -s + \frac{d}{M} - \frac{K_D}{M} \cdot \mathrm{sign}(s) - k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q})$$

- Preuve de convergence :

$$V = \frac{s^2}{2} \Rightarrow \dot{V} = s \cdot \dot{s} = \big((\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)\big) \cdot \big((\ddot{q}_d - \ddot{q}) + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q})\big)$$

$$\dot{V} = s \cdot \left(-s + \frac{d}{M} - K_D \cdot \mathrm{sign}(s)\right) = -s^2 + \frac{1}{M} \cdot \big(d - K_D \cdot s \cdot \mathrm{sign}(s)\big) \leq 0 \text{ si } K_D > d_{max}$$

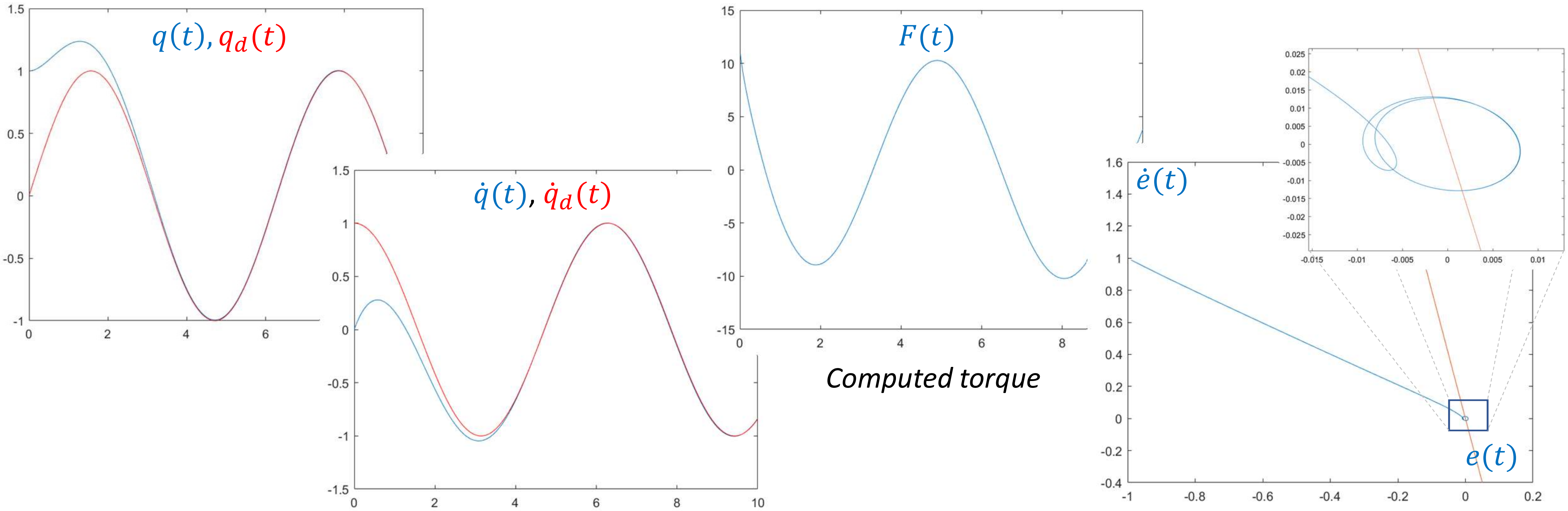
Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

$$F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q}\ , F_D = 0, d = 0$$

$$q_d = \sin(t)\,, \dot{q}_d = \cos(t)\,, \ddot{q}_d = -\sin(t)\,, \qquad q(0) = 1, \dot{q}(0) = 0$$



Computed torque

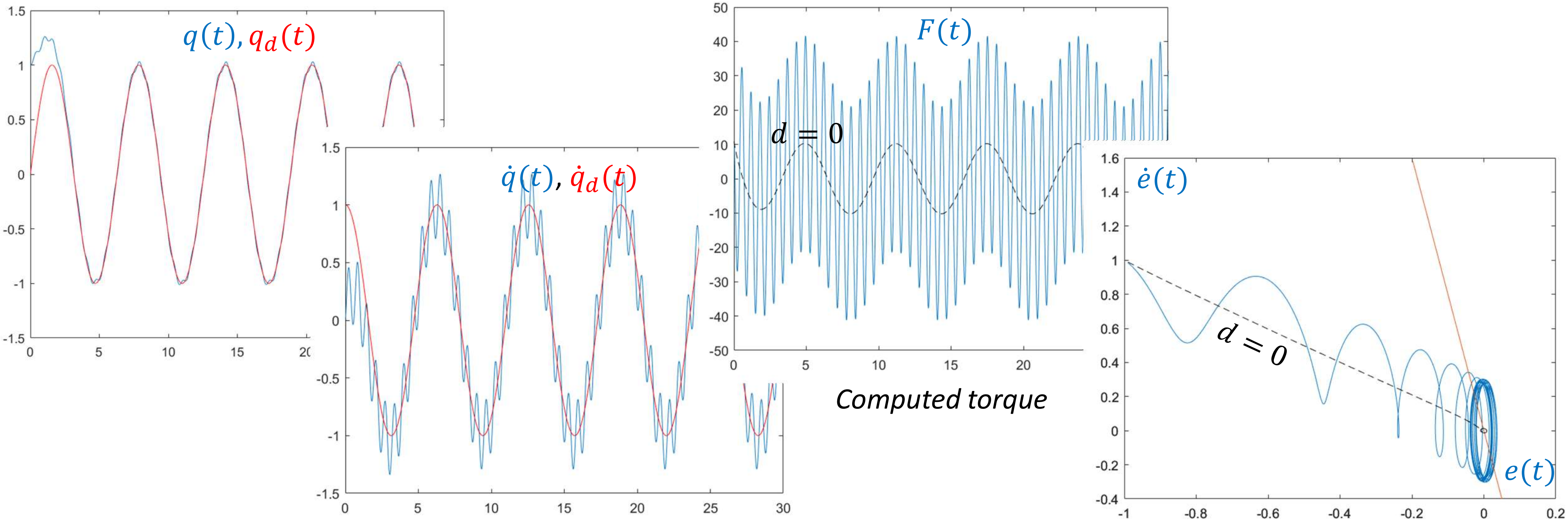
Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

$$F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q}\,, F_D = 0, d = 40 \cdot \sin(10 \cdot t)$$

$$q_d = \sin(t)\,, \dot{q}_d = \cos(t)\,, \ddot{q}_d = -\sin(t)\,, \qquad q(0) = 1, \dot{q}(0) = 0$$



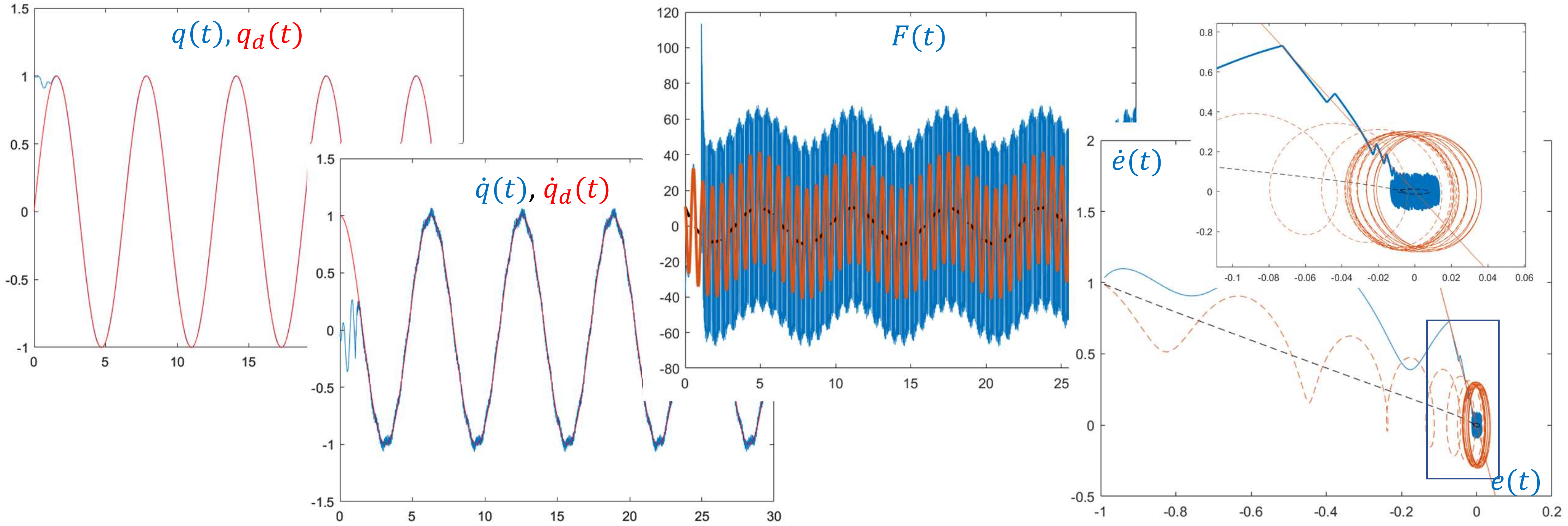
Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

$$F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q}\ , F_D = 50 \cdot \mathrm{sign}(s), d = 40 \cdot \sin(10 \cdot t)$$

$$q_d = \sin(t)\,, \dot{q}_d = \cos(t)\,, \ddot{q}_d = -\sin(t)\,, \qquad q(0) = 1, \dot{q}(0) = 0$$



Principe de la Commande par mode glissant

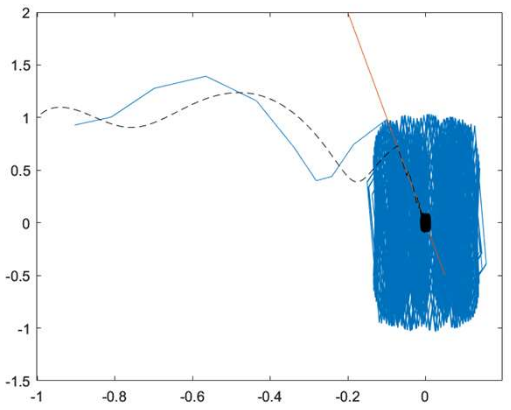
- Soit le système suivant, qui subit une perturbation d bornée:

$$M \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q} + d = F, \qquad |d| < d_{max}$$

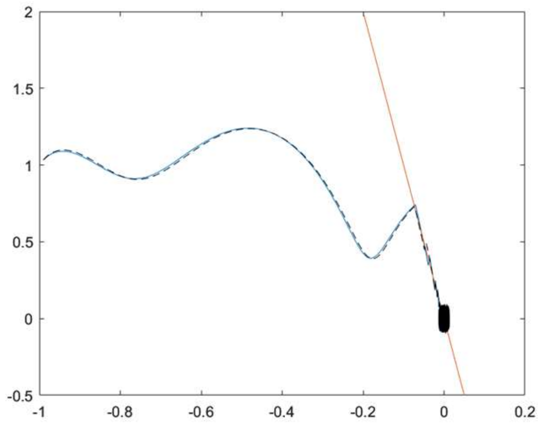
$$F_0 = M \cdot (\ddot{q}_d + k_2 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + s) + C(q) \cdot \dot{q} \, , F_D = 50 \cdot \mathrm{sign}(s), d = 40 \cdot \sin(10 \cdot t)$$

$$q_d = \sin(t) \, , \dot{q}_d = \cos(t) \, , \ddot{q}_d = -\sin(t) \, , \qquad q(0) = 1, \dot{q}(0) = 0$$

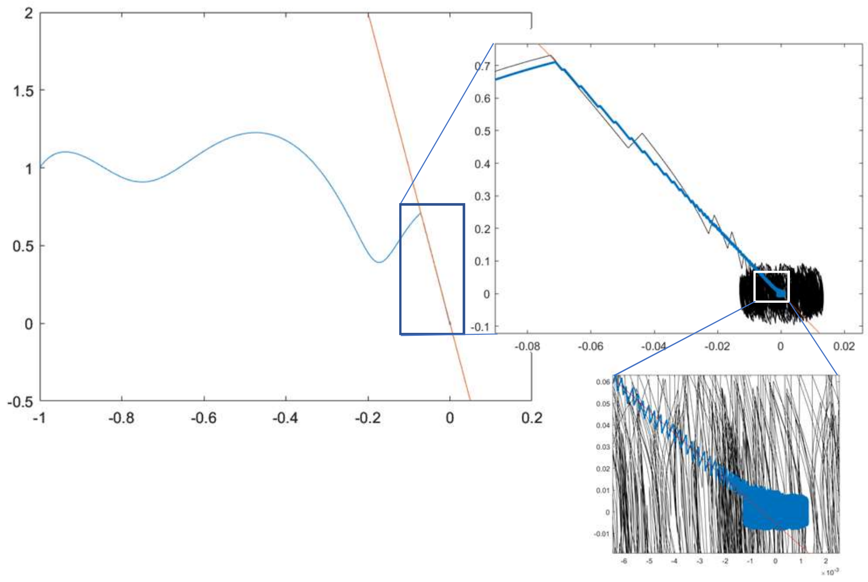
$$dt_{CTRL} = 0.1s$$
$$dt_{Integ} = dt_{CTRL}/100$$



$$dt_{CTRL} = 0.01s$$
$$dt_{Integ} = dt_{CTRL}/100$$

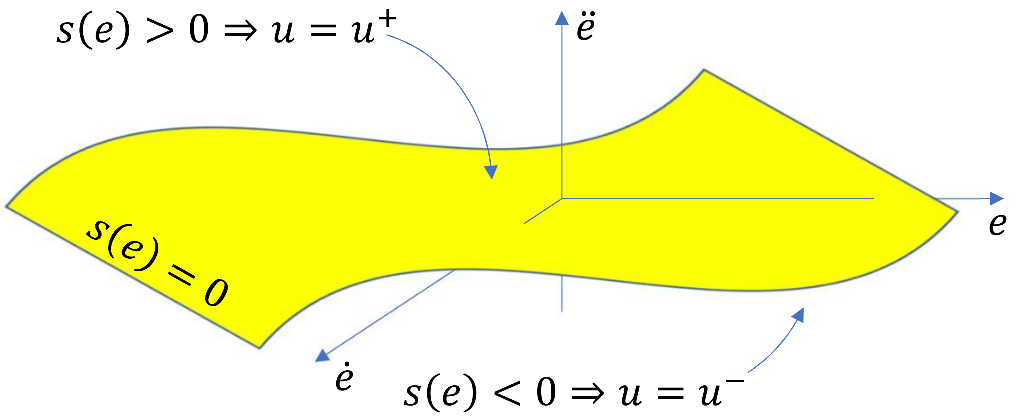


$$dt_{CTRL} = 0.001s$$
$$dt_{Integ} = dt_{CTRL}/100$$

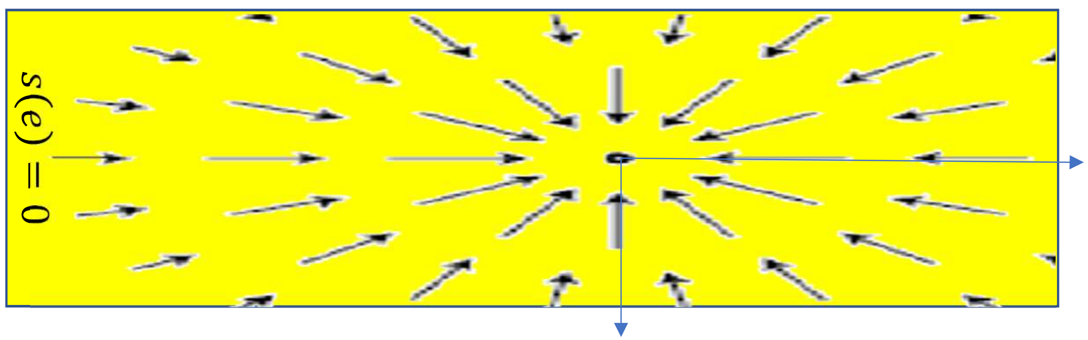


Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : $\dot{x} = f(x, u)$, $\dim x = n$
- Soit une surface : (S): $s(x) = 0$
  - (S) sépare l'espace en deux régions : $s(x) > 0$ et $s(x) < 0$
  - $s(x) = 0$ assure la convergence de la fonction d'erreur

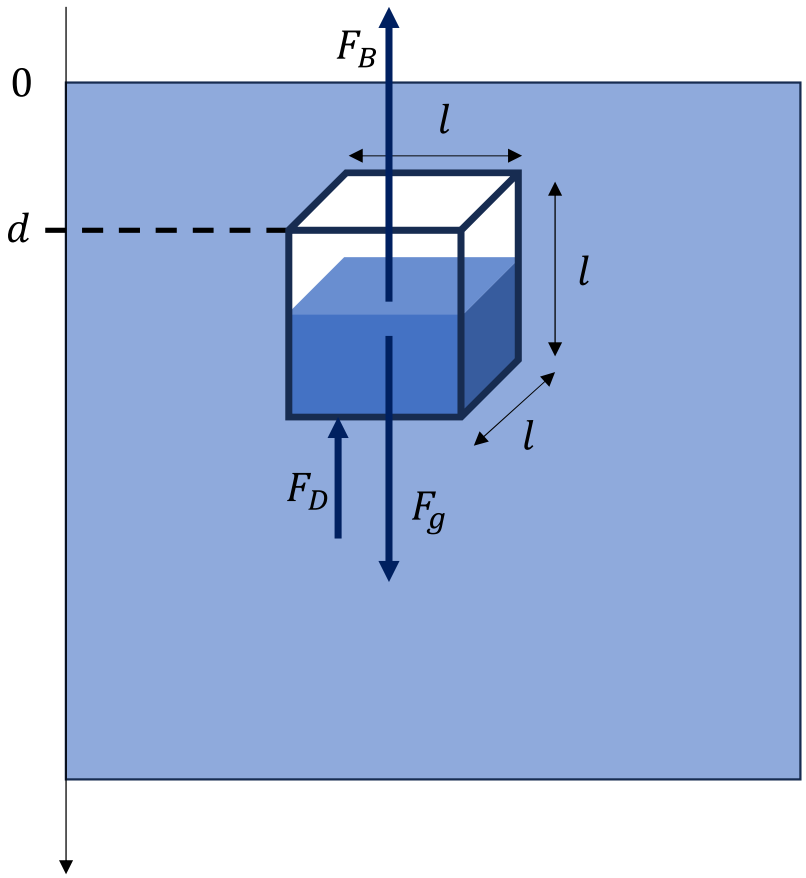


Ex : $s(e) = (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + k_1 \cdot (\dot{q}_d - \dot{q}) + k_2 \cdot (q_d - q)$
$= \ddot{e} + k_1 \cdot \dot{e} + k_2 \cdot e$

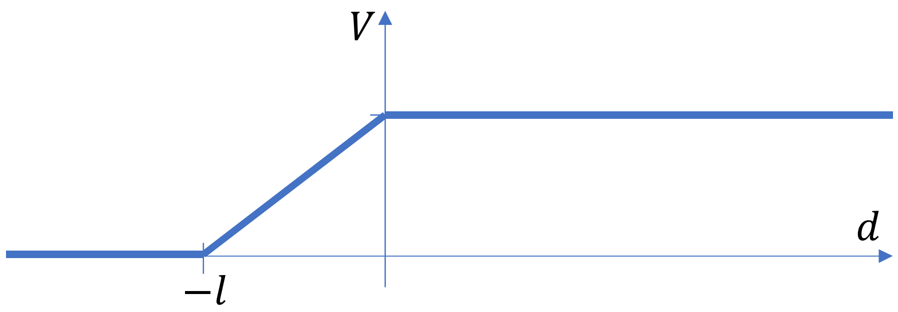


Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast

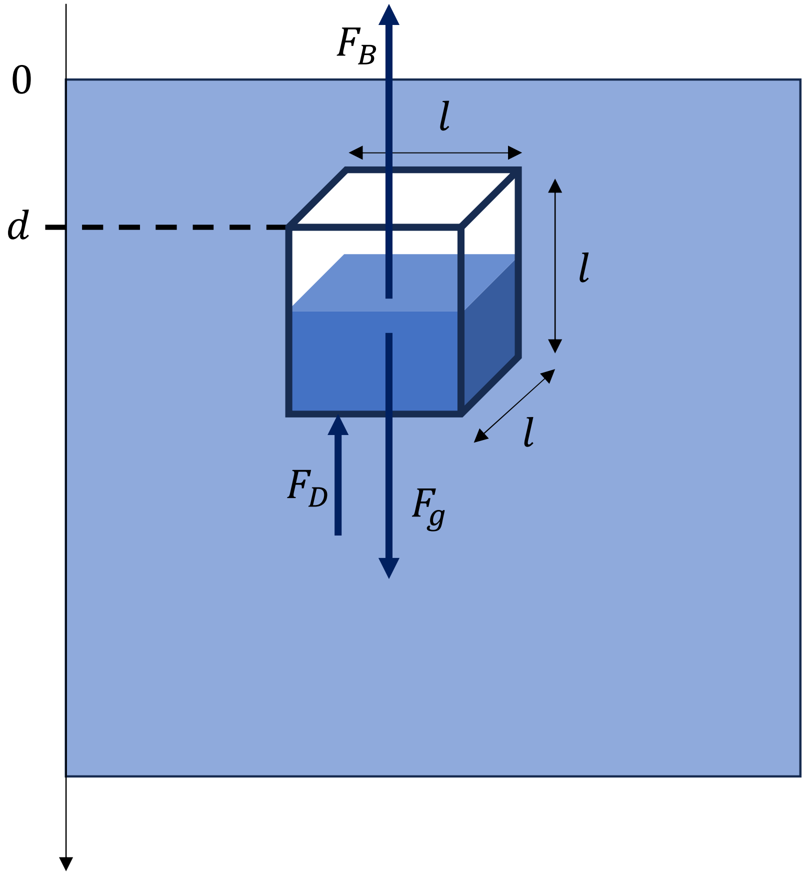


Hypothèses:
La masse $m(\rho_B)$ est une fonction de la densité du ballast
Le coefficient de trainée verticale est c_x.
La densité de l'eau est notée ρ.
La vitesse est notée $v = \dot{d}$
Le volume d'eau déplacée est donné par : $V = l^2 \cdot \max(0, l + \min(d, 0))$



Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Hypothèses:
La masse $m(\rho_B)$ est une fonction de la densité du ballast
Le coefficient de trainée verticale est c_x.
La densité de l'eau est notée ρ.
La vitesse est notée $v = \dot{d}$
Le volume d'eau déplacée est donné par : $V = l^2 \cdot \max(0, l + \min(d, 0))$

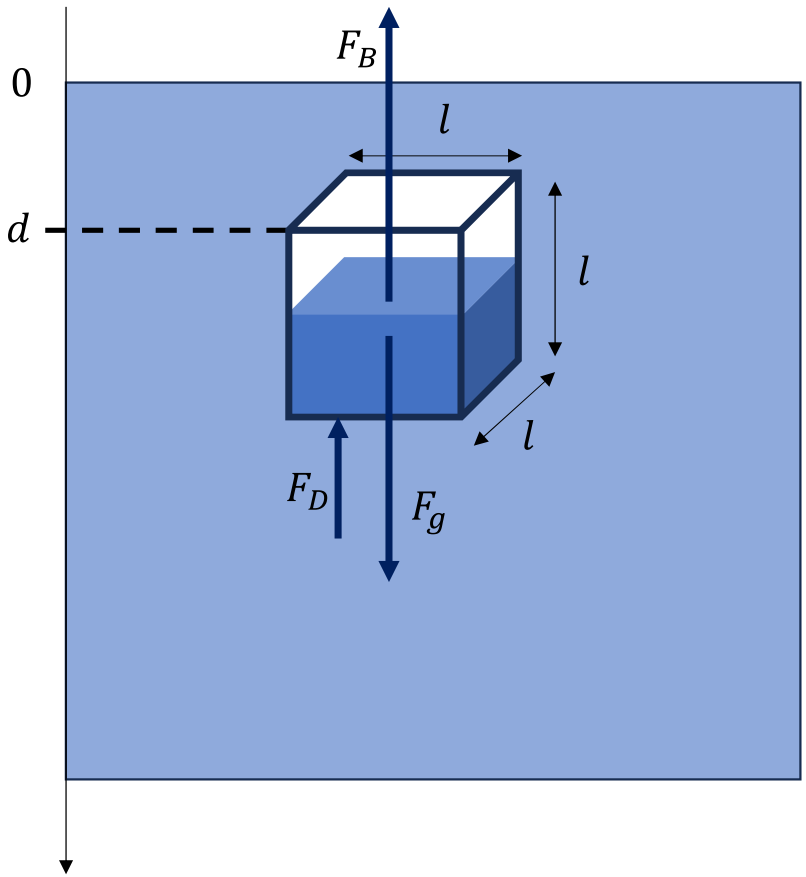
Une pompe motorisée permet de piloter le débit entrant ($u > 0$) et sortant ($u < 0$) du ballast, avec $-1 < u < 1$.
Le débit contrôlé u influe la densité globale du système tel que :
$\rho_B = (1 + \beta \cdot b) \cdot \rho$ avec $u = \dot{b}$, où $-1 < b < 1$. Ainsi :

$$m(\rho_B) = \rho_B \cdot l^3 \Rightarrow m(b) = (1 + \beta \cdot b) \cdot \rho \cdot l^3$$

$$F_g = m \cdot g \qquad F_D = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v \cdot |v| \cdot l^2 \cdot c_x \qquad F_B = -\rho \cdot g \cdot V$$

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Dynamique : $m \cdot \dot{v} = F_g + F_B + F_D$

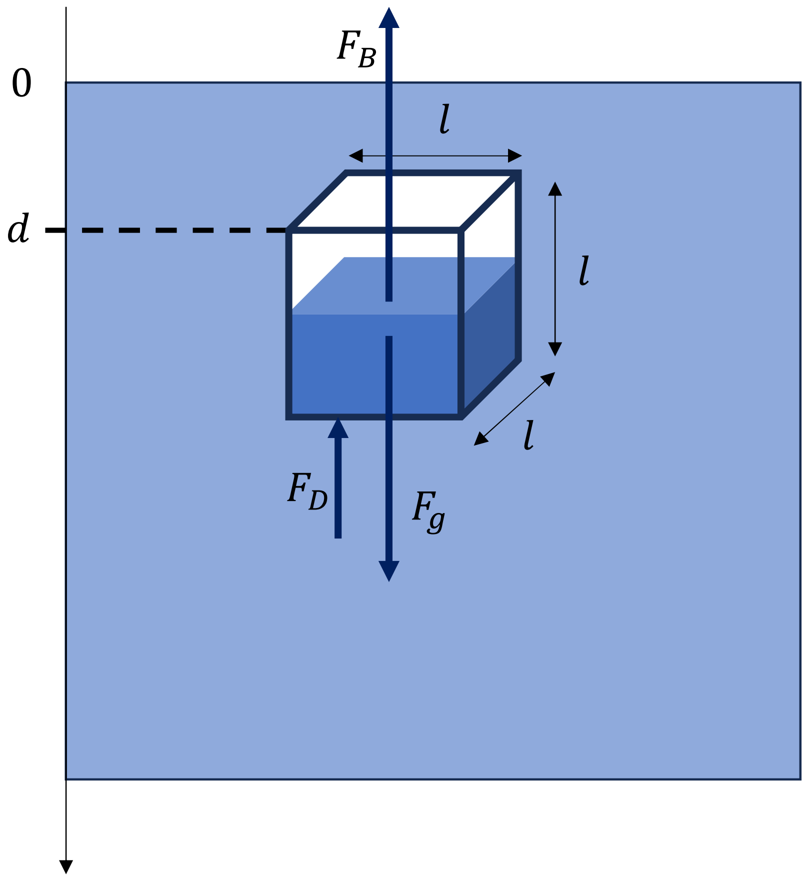
$$\dot{v} = \frac{1}{m} \cdot \left(m \cdot g + \rho \cdot g \cdot V - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v \cdot |v| \cdot l^2 \cdot c_x \right)$$
$$V = l^2 \cdot \max(0, l + \min(d, 0))$$
$$u = \dot{b}$$
$$v = \dot{d}$$
$$m = (1 + \beta \cdot b) \cdot \rho \cdot l^3$$

Choix du vecteur d'état : $\mathbf{X} = [d, v, b]^T$, $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, u)$

$$\begin{cases} \dot{d} = v \\ \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot \max(0, l + \min(d, 0)) + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \\ \dot{b} = u \end{cases}$$

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Control Design : $d < 0, \forall t > 0$

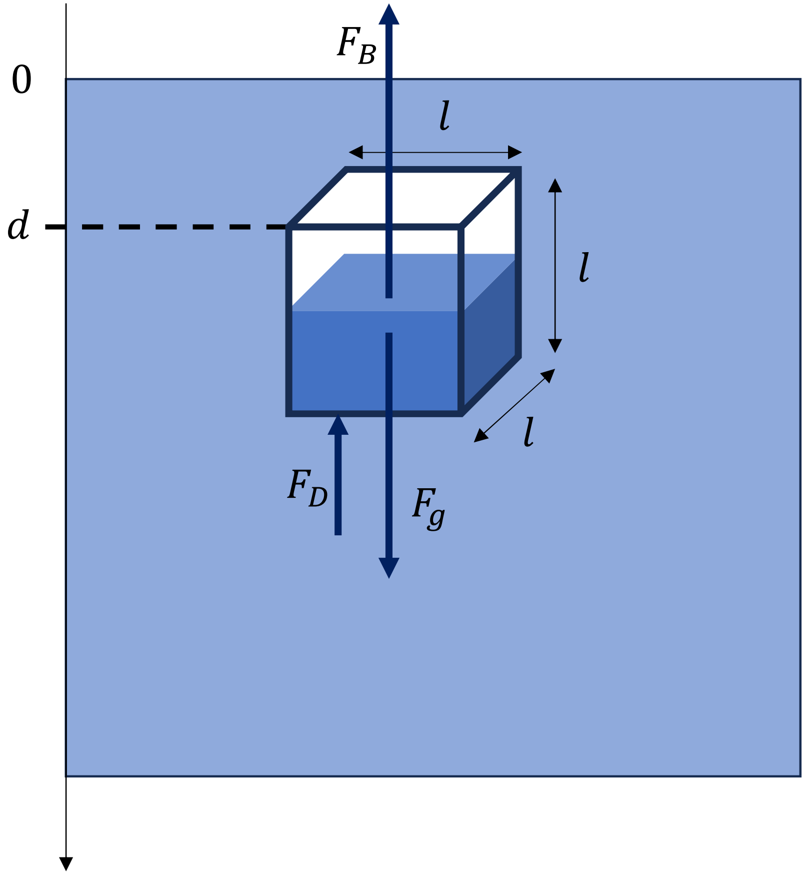
l

$$\begin{cases} \dot{d} = v \\ \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot \cancel{\max(0, l + \min(d, 0))} + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \\ \dot{b} = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{d} = v \\ \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \\ \dot{b} = u \end{cases}$$

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Control Design : $d < 0, \forall t > 0$, On mesure $y = d$.

$$\begin{cases} \dot{d} = v \\ \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \\ \dot{b} = u \end{cases}$$

Linearisation feedback :

$$\begin{cases} y = d \\ \dot{y} = \dot{d} = v \\ \ddot{y} = \dot{v} = g - \frac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1+\beta \cdot b) \cdot l} \\ \dddot{y} = \dfrac{\partial \dot{v}}{\partial v} \cdot \dot{v} + \dfrac{\partial \dot{v}}{\partial b} \cdot \dot{b} = A_v + A_b \cdot u \end{cases}$$

On pose :

$$u_2 = A_v + A_b \cdot u \Rightarrow \dddot{y} = u_2$$

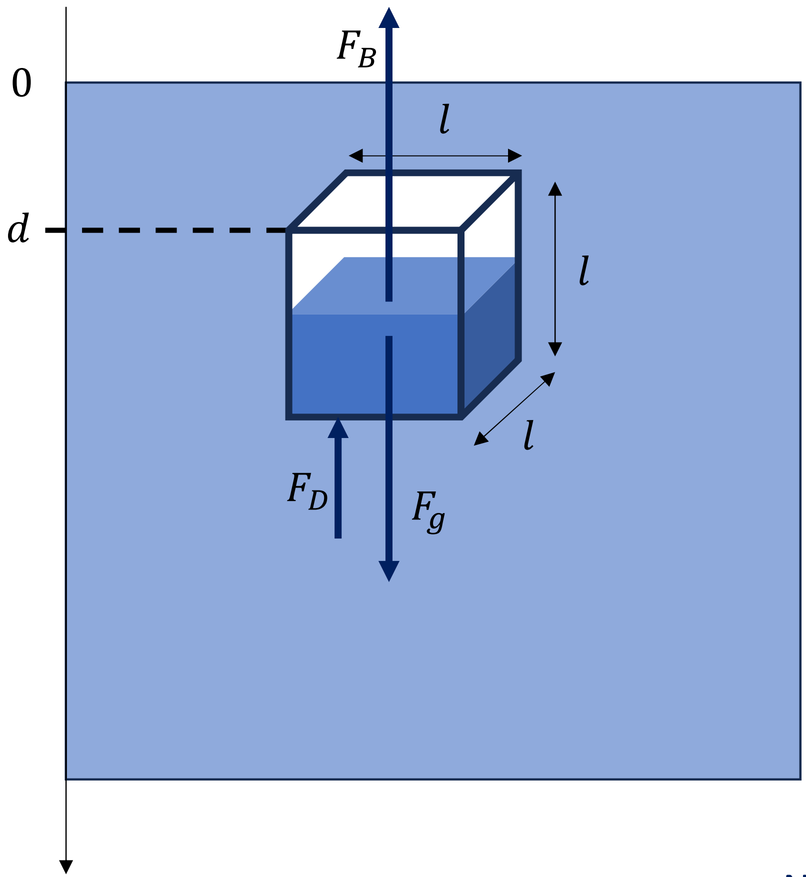
$$u_2 = \dddot{y}_d + \sum_{i=0}^{2} k_i \cdot \left(y_d^{(i)} - y^{(i)} \right)$$

&

$$u = \underbrace{A_b^{-1}}_{\text{Singularités ?!}} \cdot (u_2 - A_v)$$

Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Control Design : $d < 0, \forall t > 0$, On mesure $y = d$.

$$\begin{cases} \dot{d} = v \\ \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \\ \dot{b} = u \end{cases}$$

Sliding mode

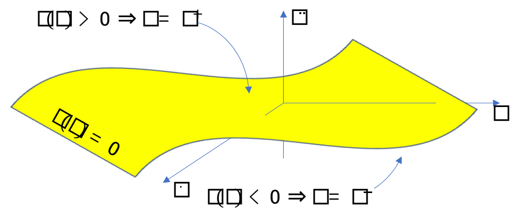
$$\begin{cases} y = d \\ \dot{y} = \dot{d} = v \\ \ddot{y} = \dot{v} = g - \frac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1+\beta \cdot b) \cdot l} \\ \cancel{\dddot{y}} \end{cases}$$

No need, since $\ddot{y}$ is monotonic w.r.t. b

On choisit une surface de glissement

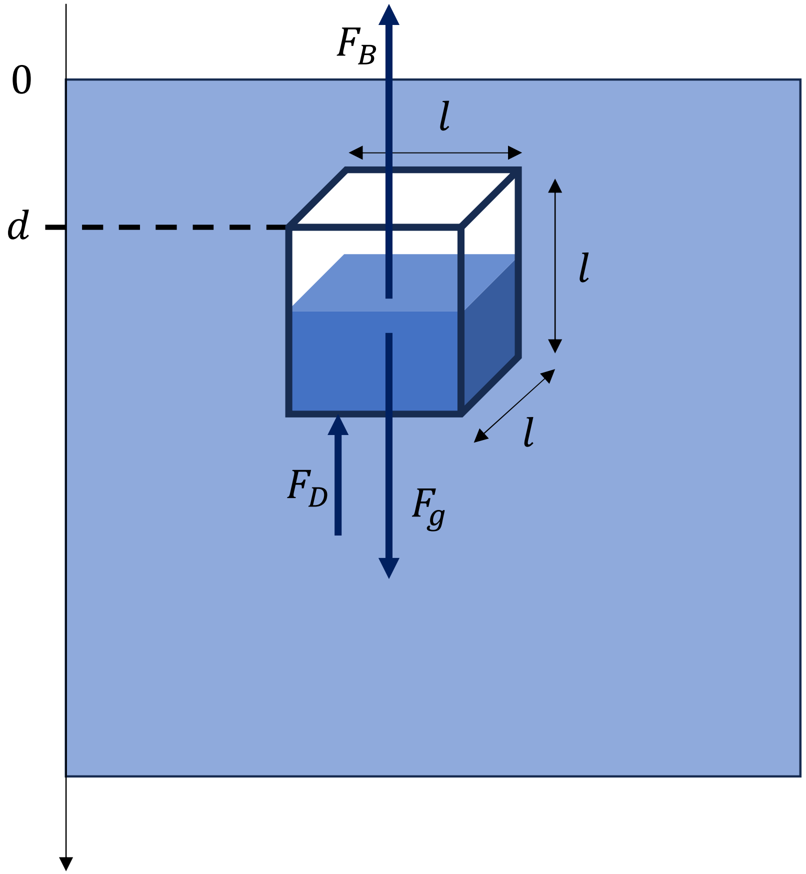
$$s(x,t) = (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + k_1 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0 \cdot (y_d - y) = 0$$

$$s(e) = \ddot{e} + k_1 \cdot \dot{e} + k_0 \cdot e = 0 \xrightarrow{(k_1,k_0)} \lim_{t \to \infty} e = 0$$



Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



Sliding mode

$$\begin{cases} y = d \\ \dot{y} = \dot{d} = v \\ \ddot{y} = \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1+\beta \cdot b) \cdot l} \end{cases}$$

On choisit une surface de glissement

$$s(x,t) = (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + k_1 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0 \cdot (y_d - y) = 0$$

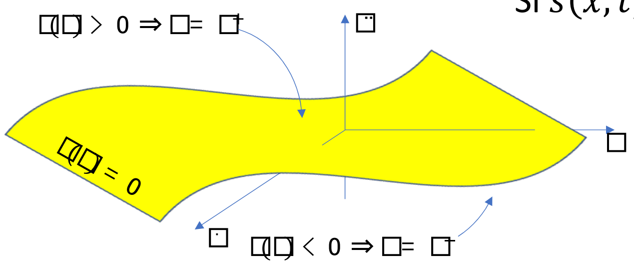
$$s(e) = \ddot{e} + k_1 \cdot \dot{e} + k_0 \cdot e = 0 \xRightarrow{(k_1, k_0)} \lim_{t \to \infty} e = 0$$

$$\dot{s} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial \ddot{y}} \cdot \frac{\partial \ddot{y}}{\partial b}}_{< 0} \cdot u + A_s$$

Si $s(x,t) > 0$, on veut $\dot{s} < 0 \Rightarrow u = 1$

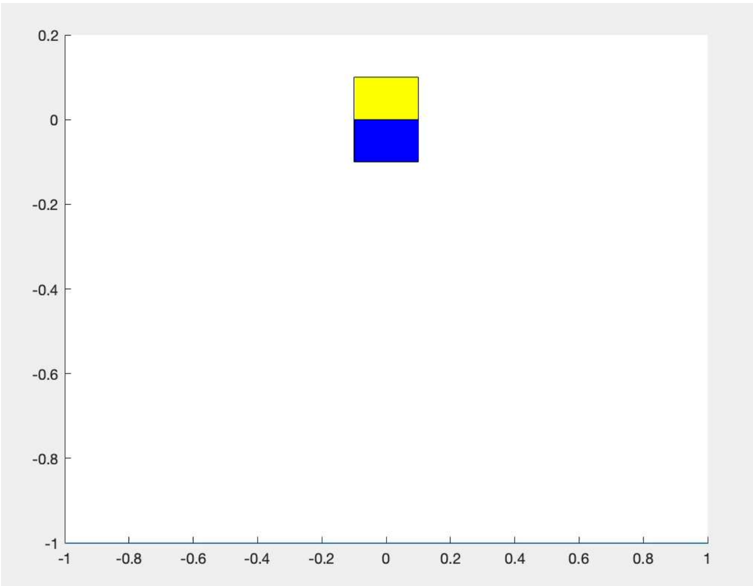
Si $s(x,t) < 0$, on veut $\dot{s} > 0 \Rightarrow u = -1$

$$\Rightarrow u = \text{sign}(s)$$



Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



$y_d = 5\mathrm{m}$

Sliding mode

$$\begin{cases} y = d \\ \dot{y} = \dot{d} = v \\ \ddot{y} = \dot{v} = g - \dfrac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1 + \beta \cdot b) \cdot l} \end{cases}$$

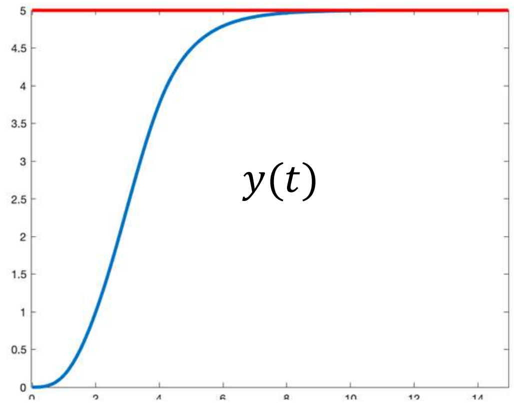
On choisit une surface de glissement

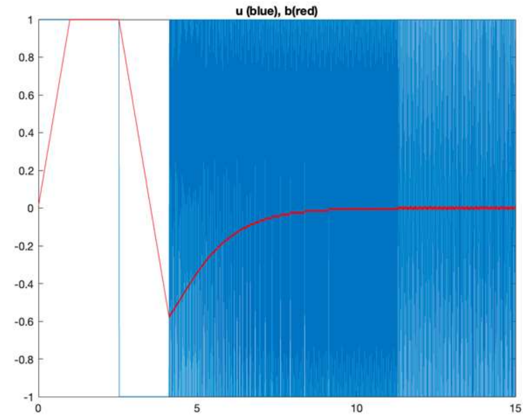
$s(x,t) = (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + k_1 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0 \cdot (y_d - y) = 0$

Si $s(x,t) > 0$, on veut $\dot{s} < 0 \Rightarrow u = 1$

Si $s(x,t) < 0$, on veut $\dot{s} > 0 \Rightarrow u = -1$

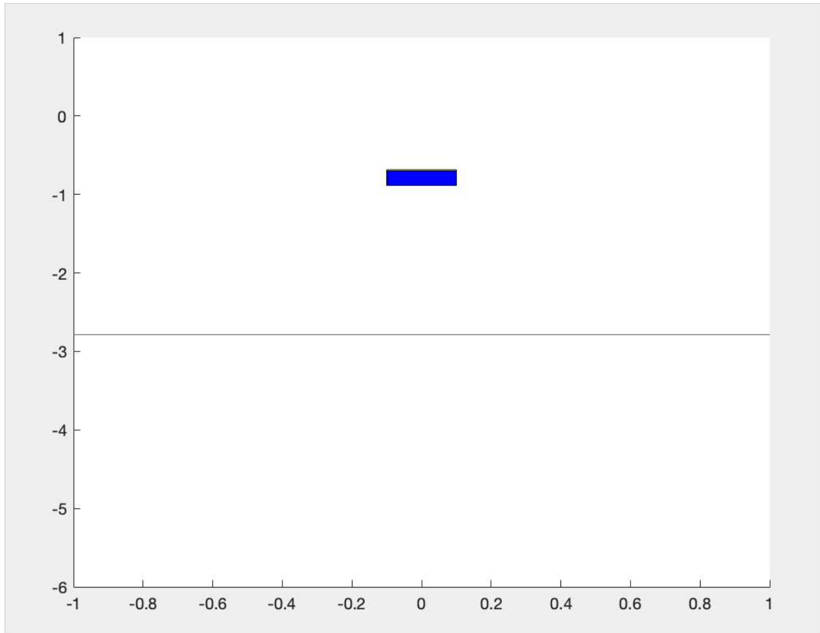
$$\Rightarrow u = \mathrm{sign}(s)$$





Principe de la Commande par mode glissant

- Soit le système suivant : le ballast



$$y_d = \sin(0.5 \cdot t) + 2$$

Sliding mode

$$\begin{cases} y = d \\ \dot{y} = \dot{d} = v \\ \ddot{y} = \dot{v} = g - \frac{g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot v \cdot |v| \cdot c_x}{(1+\beta \cdot b) \cdot l} \end{cases}$$

On choisit une surface de glissement

$s(x,t) = (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + k_1 \cdot (\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0 \cdot (y_d - y)$

Si $s(x,t) > 0$, on veut $\dot{s} < 0 \Rightarrow u = 1$

Si $s(x,t) < 0$, on veut $\dot{s} > 0 \Rightarrow u = -1$

$$\Rightarrow u = \text{sign}(s)$$